Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies.

Catherine Houdement

UNIVERSITE DE PARIS VII

DENIS DIDEROT

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée par Catherine HOUDEMENT

SUJET DE LA THESE : **Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies.**

Soutenue le 7 avril 1995 devant la commission d'examen composée de :

PRESIDENT	Jacques COLOMB
DIRECTEURS DE RECHERCHE	Régine DOUADY
	Aline ROBERT
EXAMINATEURS	Jean BRUN
	Yves CHEVALLARD
	Sylvette MAURY

Edité par l'IREM Paris VII

UNIVERSITE DE PARIS VII

DENIS DIDEROT

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée par Catherine HOUDEMENT

SUJET DE LA THESE : **Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies.**

Soutenue le 7 avril 1995 devant la commission d'examen composée de :

PRESIDENT	Jacques COLOMB
DIRECTEURS DE RECHERCHE	Régine DOUADY
	Aline ROBERT
EXAMINATEURS	Jean BRUN
	Yves CHEVALLARD
	Sylvette MAURY

Je tiens d'abord à remercier Messieurs les Professeurs Jean Brun, Yves Chevallard et Jacques Colomb, qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail et ont accepté d'être respectivement rapporteurs et président du jury. Je remercie également Mme le Professeur Sylvette Maury de l'attention qu'elle m'a portée.

Ce travail n'aurait pu se concrétiser sans l'appui permanent de mes deux directrices de recherche, Mme Régine Douady et Mme Aline Robert. Toute ma reconnaissance leur est acquise : à Régine Douady pour ses nombreux conseils et enseignements, à Aline Robert pour son aide toujours généreuse et structurante et pour la somme de temps et d'énergie qu'elle a mobilisée afin que ce travail se conclue. Merci infiniment.

Mes remerciements vont aussi à mes collègues enseignant en I.U.F.M., tout particulièrement à Alain Kuzniak, Marie-Lise Peltier, engagés dans le même type de recherche, et à Maryline Cantor. Leurs préoccupations voisines et leur soutien permanent m'ont permis de traverser l'épreuve avec une relative sérénité.

Enfin, et surtout, mille mercis à Martin, dont la tendre et active présence n'a pas failli, et à Joseph, Jérôme et Julien, qui, chacun à leur façon, m'ont permis d'achever ce travail, à défaut de le parachever.

INTRODUCTION

Introduction générale

La formation en mathématiques des maîtres du premier degré est l'essence de mon métier depuis plusieurs années. Si les premières années m'ont vu extrapoler de ma pratique[1] d'enseignant de collège une méthodologie expérimentale de transmission de connaissances, l'évolution des recherches et des expériences[1] conjointes des autres formateurs m'ont aidée à acquérir une spécificité que je revendique dans la formation des maîtres. L'existence d'une quelconque spécificité du métier de formateur est loin de faire l'unanimité, même dans le milieu enseignant. Je souhaite donc la soumettre à une certaine objectivation.

A. Qu'est-ce que former au métier d'enseignant ?

Former, ce n'est pas seulement donner des informations, c'est aussi enrichir les conceptions[1] du formé sur les mathématiques et l'enseignement en s'appuyant sur les théories actuelles de l'apprentissage, la bibliographie existante, l'état des recherches dans les domaines contigus, à l'intérieur des cadres institutionnels fixés, pour lui permettre de s'adapter aux diverses situations d'enseignement qu'il va rencontrer tout au long de sa carrière : élèves différents, secteurs différents, collègues différents, programmes différents,.... Former, ce n'est pas un instantané, c'est un pas vers le long terme : il ne s'agit pas seulement de communiquer des recettes de validité locale et limitée dans le temps, pas seulement de modifier les conceptions du formé à l'intérieur du centre de formation, mais aussi et surtout de préparer à combiner efficacement la formation reçue, les lectures effectuées et les expériences régulatrices vécues sur le terrain.

Former, c'est donc aussi amener à **penser sa pratique**, à garder un regard réflexif sur les autres pratiques et la sienne propre, pour **capitaliser l'expérience**, celle acquise en formation, celle acquise dans les premiers stages, etc. et l'adapter aux contraintes locales.

B. Lien avec la didactique

Le formateur doit viser cette réflexion introspective pour le formé, donc lui aussi se soumettre à ce regard réflexif, avec la difficulté de l'auto-analyse, celle d'être à la fois juge et partie. Or la didactique fournit des outils d'analyse de la pratique, permet à l'enseignant de se décentrer. J'utilise donc des éléments de didactique pour analyser ma pratique et la capitalisation de mes expériences (et celles de mes pairs) dans la perspective de la formation professionnelle.

---

[1] au sens naïf du terme dans tout ce chapitre.

Qu'est-ce que ma pratique ? C'est une pratique de formation sur les mathématiques et sur les savoirs liés à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire pour des futurs professeurs d'école (formation initiale) ou des maîtres déjà en exercice (formation continue).

Mais ma pratique n'est pas un instantané de mes actes actuels d'enseignement. Ma pratique, c'est, sur le long terme, la conjonction de mes décisions a priori (choix de situations d'enseignement), croisées avec celles prises dans la classe (évolution et évaluation de ces situations par la pratique), qui conduisent après quelques années (essais) à quelques éléments de stabilité et de satisfaction réciproque (du formateur, et des formés qui ont l'occasion de s'exprimer dans des bilans).

C. Limites de l'étude et définition de la problématique

Ma pratique, ce sont donc mes habitudes de formateur et à travers elles, celles des autres formateurs que je côtoie, que je reconnais comme pairs. Se lancer dans une étude exhaustive de celles-ci serait une gageure. Je limite donc mon sujet d'étude à la recherche d'éléments pour la construction d'un projet global de formation en mathématiques pour les futurs enseignants du premier degré.

> Quels éléments puis-je extraire de l'analyse de ma propre pratique et de celle accumulée par les formateurs du premier degré de mathématiques pour contribuer à cette réflexion ?[2]
>
> Quels critères de choix proposer pour trier ces éléments ? pour les utiliser pour une telle construction ?

D. Spécificité conjoncturelle de cette problématique

La formation des instituteurs s'est transformée au fil des années, tant sur la durée des études (de 3 à 2 ans voire 1 an) que sur le niveau de recrutement (baccalauréat, puis DEUG, puis licence), la place et les contenus du concours.

La thèse d'A.Kuzniak[3] donne des précisions sur les acteurs de la formation des maîtres du premier degré et explicite plus en détail les changements ; je me contenterai d'un résumé.

Le tableau ci-dessous regroupe les caractéristiques des diverses étapes.

---

[2] Pour distinguer l'expérience du formateur du regard du chercheur sur ces pratiques, je jouerai, en particulier dans la deuxième partie, sur l'utilisation des deux pronoms personnels : "je", comme formateur et "nous" comme chercheur.

[3] A.Kuzniak (1994), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, pages 23 à 44, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

Nom du centre	Année	Temps de formation	Diplôme requis	Concours	Evaluation dans le centre de formation	Sortie[4]
Ecole normale	1979	3 ans obligatoires	bac	Avant l'entrée, épreuves disciplinaires uniquement	Contrôle continu Validation positive des stages	Instituteur et titulaire du DEUG instituteur
Ecole normale	1986	2 ans	DEUG	idem	idem	Instituteur
IUFM	1991	1 an facultatif et 1 an obligatoire	licence	En fin de première année facultative, épreuves disciplinaires et didactiques	La deuxième année, contrôle continu et validation positive des stages	Professeur d'école

Par contre les connaissances scientifiques, plus spécifiquement mathématiques, des promotions d'étudiants venant chercher une formation de futur instituteur n'ont pas fondamentalement varié. Les étudiants restent essentiellement non scientifiques, quelquefois même "handicapés" des mathématiques, du moins toutes ces dernières années[5] (jusqu'en 1993).

Ces différences institutionnelles et la présence du concours en milieu de formation amènent les ex-professeurs d'école normale à s'interroger sur l'extension possible de leurs expériences de formation dans les IUFM. Le travail que je présente ici s'inscrit dans cette réflexion.

Que prendre de l'expérience des Ecoles Normales pour l'étendre ?

Quelle contribution d'une pratique réfléchie et d'une capitalisation d'expériences en formation mathématique d'enseignant puis je apporter à la communauté ?

Nous devons préalablement pointer certains aspects de cette transformation des écoles normales en I.U.F.M et plus précisément nous concentrer sur trois aspects de cette transformation :

- la multiplication des plans de formation
- les nouveaux formateurs
- le côtoiement institutionnel des futurs maîtres du premier degré et du second degré.

[4] Ceci m'amènera, dans le corps du texte, à parler tantôt d'*instituteur*, plus souvent de *professeur des écoles* ; ces deux expressions seront néanmoins considérées comme synonymes et quelquefois remplacées par *maîtres d'école* ou *maîtres* tout court.

[5] Il n'est pas sûr que cette tendance ne se renverse pas, compte tenu de l'attirance que représente le métier de professeur des écoles dans la conjoncture économique actuelle (fonctionnariat et un attrait peut-être supérieur depuis l'égalisation des rémunérations, à celui de professeur des lycées et collèges). Peut-être verra-t-on bientôt beaucoup plus de scientifiques se destiner au professorat des écoles.

1. La multiplication des plans de formation

La transformation des écoles normales en I.U.F.M. a donné une autonomie régionale aux centres de formation. Contrairement aux anciennes écoles normales régies par un programme national, aussi bien pour les matières, les contenus et les horaires (135 heures de mathématiques sur les deux années de la formation), les enseignants pour le premier degré ont été amenés à construire leur propre plan de formation, ne recevant de la Direction des Enseignements Supérieurs que des grandes lignes (et un aval après relecture). Sont donc apparus autant de plans de formation que d'académies, chaque I.U.F.M. cherchant à s'adapter localement aux contraintes.

Cette variété des plans touche les mathématiques, aussi bien sur les horaires que sur les contenus : la transformation des écoles normales en I.U.F.M. a entraîné une baisse du temps de formation consacré spécifiquement aux mathématiques[6] ; des différences se trouvent également dans la rédaction des contenus de la première année de formation, celle qui éclaire les contenus du concours. Quels éléments ont prévalu pour ces choix différents ? Comment choisir des contenus de formation de première année ? Comment déterminer un temps de formation ? Telles sont certaines des questions qui émergent de cette multiplication des plans de formation.

S'il est sûr que la détermination du temps de formation est liée aux contraintes globales du plan de formation de l'I.U.F.M., par contre les contenus mathématiques sont du ressort des équipes de mathématiques de chaque I.U.F.M. Une réflexion sur le choix et la programmation de ces contenus fait donc partie à part entière d'une réflexion de formateur, en amont de la construction d'ingénieries visant à respecter ce programme.

2. La formation des nouveaux formateurs

Le changement de contexte institutionnel (pour le premier degré, le concours est maintenant situé entre la première et la deuxième année, et ne se place plus avant les deux ans de formation) et social (chômage important, qui entraîne la recherche d'une stabilité d'emploi dans le fonctionnariat), augmente le nombre d'étudiants (futurs professeurs d'école) en première année d'I.U.F.M. Simultanément la création des I.U.F.M. correspond à une tentative de mise en oeuvre d'une réelle formation pour les futurs professeurs de collège et lycée. Il est donc nécessaire d'augmenter le potentiel de formateurs. L'habituel groupe des ex-professeurs d'école normale ne suffit plus à contenter la demande de formation, il s'y ajoute des nouveaux

---

[6] Un parcours rapide des temps de formation pour l'année 1992-93 fait apparaître en première année une variation de 60 à 88 heures de mathématiques obligatoires (temps moyen 65 heures pour 17 académies), auxquelles s'ajoutent à titre de soutien entre 9 et 40 heures, des variations intervenant même dans des centres dépendant de la même académie. Pour la deuxième année, l'horaire oscille entre 25 et 60 heures. Sur 17 académies, le total du temps de formation mathématique obligatoire varie entre 70 et 135 heures, le temps moyen se situe autour de 105 heures (source : tour de table des divers participants au groupe sur *Les sujets de concours* lors du colloque d'Aussois, mai 1993).

formateurs, anciens professeurs de lycée et collège ou bien universitaires, plus ou moins engagés dans la formation professionnelle.

Ces nouveaux formateurs n'ont plus de texte de référence nationale, ils appliquent les textes sur les contenus de formation déterminés localement. Si ce mode de fonctionnement ne pose a priori pas de problème pour les contenus mathématiques classiquement reconnus et nommés, en revanche pour les contenus de type plus professionnel, parce qu'ils sont moins cernés et arrêtés, ce mode de fonctionnement peut introduire des différences.

Dans certaines académies, l'équipe voit souvent même arriver, chaque année, un nouveau nommé, sans grande expérience ni de l'école élémentaire, ni de la formation professionnelle, mais soucieux de s'initier au mieux à sa nouvelle tâche de formation. Si les ouvrages variés lui permettent de s'informer sur les démarches d'enseignement prônées à l'école élémentaire, par contre jusqu'à ces dernières années, peu d'écrits immédiatement accessibles, livraient une vulgarisation des contenus et démarches de formation pour de futurs instituteurs ou professeurs d'école. Une préoccupation certaine d'un bon nombre de formateurs plus anciens est donc de "mettre dans le bain " au plus vite ces jeunes collègues (jeunes dans ce métier!).

L'habituelle formation par "compagnonnage", possible dans l'artisanat des écoles normales, ne paraît plus adaptée à la nouvelle institution I.U.F.M. : changement de taille de l'institution, mais aussi augmentation et essai de théorisation des connaissances sur l'enseignement des mathématiques (alors qu'auparavant ces connaissances restaient du domaine privé ou collégial des formateurs)[7].

Il devient nécessaire de professionnaliser la formation de formateurs.

3. La juxtaposition avec les formations du second degré

Les I.U.F.M. font se côtoyer, à défaut de se mêler, futurs professeurs du premier degré et du second degré. Une des préoccupations communes entre formateurs du premier et du second degré peut être, pour partie, la communication des fruits des recherches en didactique aux futurs enseignants. La didactique fournit bien sûr aux formateurs des éléments de construction, d'analyse, de leurs propres situations de formation, éléments qu'ils extrapolent des diverses recherches sur les apprentissages des enfants et adolescents, puisqu'il existe encore peu de recherches sur un public adulte de futurs enseignants. Il ne s'agit pas de nier l'utilité de la didactique. Mais la grande question pour la formation, en particulier initiale, reste : comment faire passer les savoirs didactiques aux étudiants autrement qu'en les associant à des recherches ?

---

[7] La C.O.P.I.R.E.L.E.M. (Commission Permanente des I.R.E.M. de Réflexion sur l'Enseignement à l'école élémentaire), dont je fais partie, est d'ailleurs engagée dans ce souci de formation. Elle a organisé trois stages d'une semaine (Cahors 1991, Pau 1992, Colmar 1993) avec l'objectif de produire une brochure, respectant des exigences de communication externe (externe au groupe "habituel" des ex-P.E.N -professeurs d'école normale.) de situations de formation auparavant du domaine collégial des formateurs P.E.N.

Aucune théorie ne peut à l'heure actuelle coiffer les phénomènes de transmission des savoirs mathématiques, puisque la didactique actuelle n'est qu'en voie de théorisation. Par contre les savoirs mathématiques sont eux mêmes déjà théorisés, et maintes études menées sur leurs différentes transpositions[8] . La transmission des savoirs didactiques reste donc un vaste sujet d'étude, peu encore exploré, qu'il nous semble raisonnable d'aborder, dans un premier temps, par l'étude des pratiques. Une réflexion a posteriori sur sa propre pratique de formation, réflexion appuyée par les outils didactiques disponibles, apporte une contribution dans ce sens.

Il serait tentant, notamment pour les formateurs chargés des deux niveaux de formation, d'étendre au second degré l'expérience accumulée dans le premier. Il est donc opportun de réfléchir à la spécificité de la formation du premier degré, donc de la didactique des mathématiques liée aux mathématiques du premier degré et de sa communication aux étudiants. Il peut être particulièrement utile de chercher à objectiver les choix et décisions du formateur de mathématiques du premier degré, et de définir les caractéristiques et les différences de chaque type de formation. Rappelons qu'une des différences importantes entre le premier et le second degré est l'exigence, pour le premier degré, d'une pluridisciplinarité : les futurs professeurs de mathématiques des lycées et des collèges entrent dans le centre de formation comme spécialistes de mathématiques, ce qui n'est pas le cas de la majorité de leurs pairs se destinant au professorat des écoles.

Cette analyse devrait d'ailleurs se faire pour chaque année de formation, car la présence de concours, certes en fin de première année dans les deux cas, mais différents sur leurs exigences (l'un porte sur beaucoup de matières, l'autre uniquement sur les mathématiques, sans épreuve vraiment professionnelle) peut amener des différences significatives dans la place que réservent formateurs et formés à ces deux années.

E. Conclusion

Compte-tenu de l'évolution historique récente de la formation professionnelle des maîtres du premier degré, des préoccupations actuelles des formateurs de maîtres, la construction d'un projet global de formation nous semble un sujet d'étude intéressant.

En effet, d'une part cette étude peut permettre de contribuer à clarifier la définition des contenus de formation en mathématiques pour la première année des professeurs d'école, sur le plan mathématique comme sur le plan didactique, clarification qui nous apparaît nécessaire après cette prolifération de plans de formation académiques. D'autre part elle peut participer à la transmission des savoirs didactiques, en donnant des éléments d'une progression sur ces savoirs (détermination des savoirs qui paraissent plus accessibles à des débutants, etc.)

[8] Nous nous référons à Y.Chevallard (1985), *La transposition didactique*, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

En vue d'étudier ce problème de construction d'un projet global de formation, nous choisissons donc de :

- nous interroger sur les pratiques et les habitudes des formateurs de mathématiques du premier degré en mathématiques, qui nous semblent constituer un capital de choix et démarches de transmission de savoirs sur l'enseignement des mathématiques ;
- nous placer presque en amont de la formation, puisque nous nous centrons sur la constitution d'un projet, plus particulièrement de première année, de formation de novices. Ce qui nous amène à parler de programmation des contenus.

L'explicitation de la problématique nécessite quelques mises au clair que nous examinons dans le chapitre suivant.

Mises au point méthodologiques

A. Quelques clarifications

1. Sur les savoirs de formation

Une réflexion sur la formation des enseignants nécessite une clarification sur les connaissances à faire acquérir par les futurs formés. Un adulte qui se destine au professorat des écoles doit connaître, entre autres disciplines, des mathématiques et des moyens de les enseigner et d'évaluer son enseignement. Il doit donc avoir des connaissances sur les mathématiques et sur la transmission d'un savoir mathématique[9] à des enfants dont l'âge varie entre trois et douze ans. Ces connaissances s'appuient nécessairement sur les programmes de mathématiques destinés aux enfants de cet âge.

a. Eléments d'analyse des savoirs en formation d'adultes

Nous nous référons à l'analyse synthétique des savoirs liés à la formation d'adultes présentée par G.Malglaive[10] : un enseignement destiné à des adultes, en vue d'enrichir leurs connaissances professionnelles comporte des savoirs de différentes natures ; ces savoirs régissent ensemble l'action professionnelle et l'action professionnelle les structure.

Une première analyse grossière se contenterait de distinguer savoirs du côté de la théorie et savoirs du côté de la pratique, s'appuyant sur les différences entre théorie et pratique. La théorie cherche à préciser tous les éléments de la rationalité et de la conceptualisation, mais le réel est toujours plus complexe que la connaissance qu'en donne la théorie, et l'action effective permet de révéler des effets parasites, qui feront partie de la pratique. Notons avec G.Malglaive toujours, la différence des démarches qui caractérisent théorie et pratique : la pratique se fixe comme un de ses objectifs la réussite, le succès, elle va toujours de l'avant, mais il lui suffit de faire ses preuves pour être validée ; la théorie peut et doit se permettre la faille, l'échec, le retour arrière ; mais elle doit être en permanence se justifier dans le cadre qui lui a donné naissance.

G.Malglaive analyse plus finement les savoirs qui régissent l'action professionnelle, selon les rapports qu'ils entretiennent à la pratique.

[9] Nous n'utiliserons pas la distinction pointée par G.Brousseau entre savoirs et connaissances (7ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, octobre 1993), non parce que nous en nions l'intérêt, mais parce qu'elle ne nous semble pas enrichir ce type de recherche. Ces deux mots resteront synonymes dans tout notre travail.

[10] G.Malglaive (1990), *Enseigner à des adultes*, pages 69 et suivantes, Collection Pédagogie d'aujourd'hui, Editions Presses Universitaires de France, Paris.

- Les savoirs théoriques

"Les savoirs théoriques permettent de connaître l'objet et ses modalités de transformation, la machine et les raisons de son fonctionnement"

Ils ne sont pas en liaison opératoire directe avec la pratique, mais permettent

"d'ajuster [...] les interventions pratiques sur la réalité, de prévoir leurs effets [...], de fixer les conditions et leurs limites de validité [...].
Le seul effet pratique d'un savoir théorique est de faire connaître, et non de faire faire ; de dire ce qui est et non ce qui doit être.
[...] le savoir théorique ne dit pas ce qu'il faut faire, mais conduit à agir avec discernement, [...].

Cependant, le savoir théorique n'a pas de rapport d'**application** vis à vis de la pratique, mais un rapport d'**intervention**. La pratique s'appuie sur lui, mais il doit s'engager dans la pratique.

"Le *savoir théorique*[11] est donc le fondement indispensable de l'efficacité des savoirs qui règlent l'action *les savoirs procéduraux*."

- Les savoirs procéduraux : ces savoirs sont déjà du côté de la pratique, puisqu'ils supposent une connaissance du réel sur lequel opère l'action. Ils représentent

"les enchaînements d'opérations, les règles et les conditions à respecter pour obtenir les effets voulus et n'obtenir qu'eux, qui s'organisent en procédures ou en plans d'action"

Ce sont des savoirs lacunaires sur les pratiques, une partie de ce qu'il faut savoir pour agir. Une définition de ces savoirs procéduraux plus explicite est celle proposée par Delbos et Jorion[12] :

Nous appellerons "procédural" le savoir qui peut être abstrait de l'observation d'une pratique. Il s'agit très précisément du savoir que l'on trouve sous forme écrite dans les *manuels* (il ne faudrait pas confondre "mise en écriture" et "théorisation" : le manuel est un ouvrage a-théorique).

- Les savoirs pratiques : ils représentent la partie complémentaire des savoirs procéduraux sur la pratique ; ils sont directement liés à l'action, collent au réel et visent l'efficacité. Par opposition aux savoirs procéduraux, ils ne sont pas écrits.

- Les savoir-faire

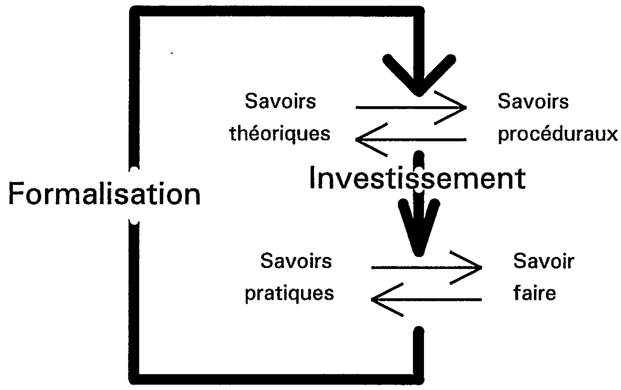
Comme les savoirs, il sont multiples. Ils se réfèrent par définition à la pratique et sont relatifs à la manifestation des actes humains. Ils sont constitués de routines, d'habitudes (peu importe comment ils ont été appris) et ne deviennent cohérents que structurés par une syntaxe ; ils pourraient peut-être se résumer par l'expression d'une maîtrise, d'une expertise professionnelle.

---

[11] en italique dans le texte original.

[12] Delbos G. et Jorion P. (1984), *La transmission des savoirs*, page 11, Ministère de la Culture et de la Communication, Editions de la Maison des Sciences de L'Homme, Paris.

G.Malglaive précise d'ailleurs que les différents savoirs mentionnés ci-dessus se nourrissent les uns les autres et sont tous constitutifs du savoir lié à un métier, qu'il nomme **savoir en usage**. Ce savoir s'ajuste à la pratique. G.Malglaive résume les transformations de ces savoirs par le schéma suivant :



Il nous semble que cette analyse peut s'importer dans la formation d'enseignants (bien qu'a priori elle est été créée pour la formation continue d'adultes en général) de la façon suivante.

b. Le savoir en usage des professeurs d'école

Le savoir en usage des professeurs d'école s'articule communément autour de savoirs disciplinaires (sur la langue, sur les mathématiques, etc.), didactiques et pédagogiques. Mais les expressions de didactique et pédagogie sont quelquefois ambiguës et polysémiques. Nous allons préciser dans quel sens nous les utilisons en nous appuyant sur la synthèse que M.Altet[13] tire des différents ouvrages sur la question qu'elle a consultés.

Didactique et pédagogie ne sont pas opposées, mais complémentaires :

> "elles ont le même objet : l'étude du processus enseigner-apprendre, mais elles l'abordent par des entrées différentes et complémentaires, dans des temps différents, en considérant les acteurs différemment : l'élève du didacticien, c'est l'apprenant ; l'élève du pédagogue, c'est une personne globale ; l'enseignant du didacticien, c'est un technicien du savoir et de ses modes d'acquisition ; l'enseignant du pédagogue, c'est un médiateur de la relation."

La didactique se permettrait ainsi des spécialisations disciplinaires, puisqu'elle s'adresse au(x) savoir(s). La pédagogie garderait un caractère plus général. M.Altet précise que ces différences entre didactique et pédagogie ne préjugent en rien de l'existence d'aspects théoriques pour chacune, mais simultanément reconnaît l'absence d'une théorie "pédagogique" pour le moment :

> "Comme il existe la didactique, champ de la structuration, de l'organisation, de la gestion des contenus, il serait aussi bon de créer *une pédagogique*[14], corps de savoirs pédagogiques, de

[13] M.Altet (1994) -*La formation professionnelle des enseignants*, page 17 et suivantes, Collection Pédagogie d'aujourd'hui, Editions PUF.

[14] en italique dans le texte original.

connaissances professionnelles issues des recherches en sciences de l'éducation sur la gestion des flux interactifs d'information, sur l'organisation de la relation interactive, les conditions d'apprentissage, de la situation pédagogique mises en oeuvre par l'enseignant en classe. il s'agit de développer des *savoirs de la pratique*[15]."

Comment cette analyse s'articule-t-elle avec celle donnée par G.Malglaive ? Comment, à partir de ces deux analyses tenter de définir des savoirs de formation, ceux que le formateur considère licites et adaptés à une future maîtrise du métier de professeur d'école ?

c. Les savoirs de formation pour les professeurs d'école

Nous nous centrerons plus particulièrement sur les savoirs nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, du fait de notre spécialité et de notre fonction de formateur. Ce qui ne nous empêchera pas d'évoquer des aspects plus généraux liés à l'enseignement, mais seulement dans la mesure où ils répondent à un problème lié au processus enseigner-apprendre en mathématiques.

Le croisement des deux analyses précédentes fait déjà pencher du côté des savoirs procéduraux et pratiques (d'après G.Malglaive) les savoirs pédagogiques (d'après M.Altet) : organisation de la relation interactive, des conditions d'apprentissage, de la situation pédagogique mises en oeuvre par l'enseignant de la classe. Ces savoirs pratiques correspondent dans notre étude à des savoirs qui s'enrichissent, le cas échéant, par l'expérience acquise dans l'exercice du métier. Certains de ces savoirs pratiques sont reconnus et explicitables, même s'ils ne sont pas toujours généralisables. En général ils se définissent plus aisément dans une réflexion sur l'action.

Font naturellement partie des savoirs théoriques nécessaires au métier d'enseignant les savoirs mathématiques nécessaires à l'enseignement des mathématiques au niveau d'enseignement souhaité, en l'occurrence pour l'école primaire en ce qui nous concerne. A priori les savoirs mathématiques peuvent sembler bien définis, mais ce n'est pas si simple. En effet, les savoirs mathématiques de formation sont d'abord les savoirs mathématiques en amont des contenus mathématiques des programmes de l'école[16]. Prenons un exemple . la division euclidiennne est au programme du cycle 3 des écoles (cours élémentaire deuxième année, cours moyens première et deuxième année, c'est-à-dire les trois dernières années de l'école élémentaire), il s'agit donc que les étudiants connaissent au minimum la définition et les propriétés de cette fonction de $N \times N-\{0\}$dans $N \times N$, et possèdent de solides connaissances arithmétiques. Mais la conception et l'analyse de situations didactiques liées à la division rendent souvent nécessaires des savoirs au delà des savoirs classiques liés à la division euclidienne, notamment la compréhension de la genèse d'algorithmes de recherche de

[15] idem.

[16] selon les processus de transposition cités par Y.Chevallard (1985) dans *La transposition didactique*, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

quotient entier[17], des éléments d'analyse mathématique des problèmes multiplicatifs[18], donc des savoirs plutôt traditionnellement liés à la proportionnalité. D'autre part les savoirs à enseigner à l'école subissent l'évolution des recherches en didactique, les savoirs mathématiques[19] à enseigner en formation par conséquence seront enrichis suite à ces recherches, et cela même si les contenus des programmes de l'école élémentaire ne varient pas. Les savoirs didactiques sur l'enseignement à l'école élémentaire influent ainsi sur les savoirs mathématiques de formation.

Les savoirs didactiques seraient a priori plutôt des savoirs procéduraux, puisqu'ils nécessitent une connaissance du réel et se fondent sur cette connaissance du réel. Mais, selon le processus signalé par G.Malglaive, certains de ces savoirs sont en voie de théorisation. Nous nous fondons principalement sur ceux déterminés (depuis les année 1980) par les articles des revues *Recherche en Didactiques des Mathématiques*[20], *Petit x*[21],... les écoles d'été de didactique et les Actes de *Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France*[22]. Ces connaissances encore jeunes sont soumises à fluctuation puisqu'en construction. Elles ne sont pas toujours définies uniformément dans la communauté de didacticiens ; elles ne sont pas donc reconnues par l'ensemble des formateurs.

La tâche du formateur est de transmettre tous ces savoirs dans une formation de masse (responsabilité de la formation de 25 étudiants minimum). Il ne peut donc communiquer tous les savoirs pratiques (a fortiori les savoir-faire). Dans notre travail nous nous intéresserons seulement aux savoirs explicitables, qu'ils soient théoriques ou pratiques (incluant des savoirs procéduraux), du ressort d'une transmission possible par le formateur pour un groupe, nous laisserons donc de côté des savoirs pratiques (et donc tous les savoir-faire, au sens de G.Malglaive) qu'acquiert l'étudiant lorsqu'il mène lui-même plusieurs séances de mathématiques en classe.

Nous nous attacherons donc à définir ces savoirs théoriques et pratiques, que nous appellerons **savoirs de formation** en mathématiques, qui ne constituent qu'une partie du **savoir en usage** des professeurs d'école, d'abord parce qu'ils se limitent aux aspects liés aux

---

[17] cf. l'étude de tels algorithmes dans la partie II, chapitre 2, La division.

[18] J.P.Levain (1992) : "La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire". *Educationnal Studies in Mathematics* Vol; 23, pages 139-161.

[19] Par exemple la thèse de Joël Briand sur l'*Enumération* (thèse de l'université de Bordeaux, 1994) amènera sans doute à enseigner des "mathématiques de l'énumération" aux futurs enseignants pour leur permettre de comprendre et d'analyser ses effets didactiques.
Autre exemple : dans les années 1977, l'enseignement du nombre était précédé d'activités dites pré-mathématiques de classement et de rangement ; les contenus de formation en mathématiques des instituteurs prévoyaient alors une étude spécifique de ces notions. Une nouvelle optique prévaut actuellement pour l'enseignement du nombre, l'étude des notions citées est passée en second plan au profit de la recherche de situations problèmes qui amènent l'enfant à envisager le nombre comme la réponse la plus adaptée.

[20] Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

[21] I.R.E.M. de Grenoble.

[22] 1994, EDS M.Artigue, R.Gras, C.Laborde, P.Tavignot, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

mathématiques (alors que le métier de professeur d'école est pluridisciplinaire) et ensuite parce qu'ils ne prennent pas directement en compte les régulations de la pratique personnelle de l'étudiant.

d. Premier catalogue des savoirs de formation en mathématiques

La définition de ces savoirs de formation est une préoccupation fort ancienne des formateurs d'enseignants du premier degré, du temps des écoles normales. Les formations de maîtres du premier degré existaient dans les écoles normales avant que la didactique n'ait atteint un certain développement. Elles se fondaient alors sur un découpage des savoirs de formation qui n'était pas encore influencé explicitement par la didactique, mais plutôt par la pédagogie générale. Pour faire cette distinction, nous nous appuierons sur les définitions de M.Altet[23] :

> "[...] la pédagogie porte sur l'articulation du processus enseignement-apprentissage au niveau de la relation fonctionnelle enseignant-élèves et de l'action de l'enseignant en situation; la didactique porte sur l'articulation du processus enseignement-apprentissage au niveau de la structuration du savoir et de son appropriation par l'apprenant."

C'est lors du sixième colloque des professeurs d'école normale (Bombannes 1979) que se pose pour la première fois le problème de définition des savoirs de formation, sous l'influence de l'IREM de Bordeaux. A l'occasion de ce colloque sont aussi précisées les spécificités de la didactique naissante, d'ailleurs encore très localisée. Le but de ce colloque était "l'Elaboration de documents en vue de la formation des maîtres" dans le cadre défini comme suit.

> "Améliorer la formation (ici mathématique) des enfants est la finalité principale des formateurs dans les écoles normales (PEN, IDEN, CPAIDEN,...). La formation des maîtres n'est qu'un moyen pour améliorer cette formation.
> La formation mathématiques des enfants exige la mise en oeuvre et la conduite par les maîtres de situations spécifiques du concept visé et du stade de développement des enfants. Ces situations ne peuvent être trouvées seulement par une simple combinaison de principes théoriques de psychopédagogie et de mathématiques ni par une simple transmission des pratiques des maîtres. Elles sont l'objet avec les formés (élèves maîtres ou maîtres en formation continuée) d'une activité originale, que nous appelons didactique des mathématiques et qui comporte pour eux des moments propres de réflexions théoriques, d'observations, et de réalisations d'enseignement."

L'idée de ce colloque est de commencer à constituer des dossiers, à l'intention des formateurs et des formés. Une présentation des différents sujets de dossiers (cf. annexe A, page 286) est faite dans les premières pages des Actes de ce colloque. Ces sujets sont classés en unités, d'après le problème central qui y est traité. Ce catalogue donne une bonne vue d'ensemble sur les types de connaissances que le formateur a à faire acquérir aux futurs maîtres d'école et montre les prémices des définitions d'une didactique des mathématiques. Il est loisible de constater, en lisant les intitulés des unités, que les connaissances mathématiques

---

[23] M.Altet (1994) -*La formation professionnelle des enseignants*, page 7, Collection Pédagogie d'aujourd'hui, Editions PUF.

pures ne constituent pas l'essentiel des sujets d'étude, mais que figurent de nombreuses rubriques hors du champ strictement mathématique. Cependant le traitement effectif de nombreux sujets nécessite de le relier très précisément à un thème mathématique.

A cette époque, la proposition des savoirs de formation se fait dans une perspective d'amélioration des enseignements à l'école par augmentation des connaissances de l'apprenant : il n'y a pas encore d'interrogation sur l'appropriation de ces connaissances. L'importance d'un travail sur les représentations des apprenants[24], préoccupation plus récente, n'est pas encore prise en compte.

Reprenons la rubrique des thèmes mathématiques.

1- Constructions pré-numériques et pré-mathématiques (Ecole maternelle)
2- Construction de (N, +) (N, -)
3- Construction de (N, $\times$) (N, $\div$)
4- Numération
5- Géométrie
6- Décimaux
7- Probabilités - Statistique
8- Problèmes, situations
9- Variables - Logique
10- Mesure
11- Fonctions et représentations

Ce découpage d'une part fait référence à des notions mathématiques explicitement mentionnées dans les programmes de l'école élémentaire, d'autre part s'attache à des sujets à l'époque plus prospectifs tels qu'en 7 ou plus méthodologiques tels qu'en 8 et 9.

Ce catalogue fournit à partir de 1979 la référence des thèmes mathématiques sur lesquels porte la formation. Aucune autre proposition de définition des contenus des formations n'est explicitement décrite dans les actes des colloques suivants. Cette typologie mathématique a fortement influencé les formations postérieures et de nombreux ouvrages ont plus ou moins utilisé ce découpage.

e. Quelques exemples de catalogue de thèmes mathématiques dans les écrits

Les ouvrages destinés à la formation des instituteurs fournissent eux aussi des propositions de savoirs de formation et la structure de ces ouvrages, notamment les titres des chapitres nous donnent des entrées possibles pour ces savoirs. Nous allons examiner, pour quelques uns, les intitulés des différents chapitres qui les composent.

Signalons que la référence des programmes de mathématiques de l'école élémentaire est d'abord 1978 pour le premier ouvrage, puis 1985 et 1993 pour les seconds. Les contenus mathématiques de l'école élémentaire n'ont pas varié fondamentalement au cours de ces années (de 1985 à 1993), par contre les recherches en didactique ont apporté certaines

---

[24] A.Robert, J.Robinet (1989), *Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement*, Cahier de DIDIREM 1, Université de Paris 7.

transformations dans le mode de traitement de ces contenus (notamment celles déjà signalées sur le nombre entier).

* L'ouvrage de référence des années 1980 sur la "pédagogie des mathématiques"[25] : *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire,* ERMEL, 5 tomes, du CP au CM2, rédigés par une équipe de recherche de l'INRP.

Cet ensemble d'ouvrages destinés aux maîtres en fonction, donc pour l'enseignement à l'école, a constitué un recueil très apprécié des formateurs, puisqu'il était le premier à exhiber des savoirs sur et pour l'enseignement des mathématiques de l'école, savoirs nourris par des pratiques effectives via des expérimentations en classe : chaque chapitre propose des Aspects théoriques[26] (informations mathématiques, psychologiques, épistémologiques), des Objectifs pédagogiques, des Activités minutieusement décrites, des Séquences pédagogiques (protocoles détaillés de séquences).

Ces savoirs sur l'enseignement des mathématiques sont regroupés en chapitres intitulés[27] par les savoirs mathématiques de référence sous-jacents aux mathématiques enseignées à l'école. Les contenus de formation sont donc organisés autour des savoirs mathématiques élémentaires (par exemple classement, rangement, etc. pour la construction mathématique du nombre entier) qui justifient et expliquent les programmes.

* Un ensemble d'ouvrages qui se veut pour l'enseignement en formation (visant un enseignement à l'école, donc intégrant une composante pratique de formation)
Se former pour enseigner, C.Dubois et al, 1993, Ed A.Colin : 4 tomes

Cet ensemble vise explicitement les étudiants se destinant au professorat des écoles et les formateurs.

[25] quand le mot "pédagogie" recouvrait tous les savoirs sur l'enseignement et que la distinction pédagogie-didactique n'était pas si explicite.
[26] cité ainsi dans l'ouvrage
[27]

ERMEL CP 1977	ERMEL CE 1978 (2 tomes)	ERMEL CM 1981 à 82 (3 tomes)
- Désignation - Partition - Produit cartésien - Relations d'ordre et d'équivalence - Algorithme - Correspondance terme à terme - Nombre - Numération - Ecritures additives	- Calcul mental - Classement Rangement - Problèmes - Géométrie - Numération - Produit cartésien - Relations fonctionnelles - Distance	- Problèmes - Calcul mental - Algorithmes - Numération et opérations - Division - Décimaux - Mesure - Fonctions numériques - Géométrie

Les titres de chapitres[28] montrent les savoirs à enseigner à l'école, en reprenant les expressions usuelles des mathématiques de l'école.

* Deux tomes (chapitres 1 à 6, puis 7 à 13) qui se veulent pour la préparation au concours des étudiants se destinant au professorat des écoles (pas de composante pratique, en dehors des aspects liés à la partie plus professionnelle du concours[29]) :
Préparation au Concours de Professeurs des Ecoles, A.M.Kmety-Marchetti, 1993, Editions du Choix

Chaque chapitre comporte une partie, rappels de cours, et selon le chapitre, une, deux ou trois parties parmi : exercices d'entraînement[30], exercices de concours de type théorique, exercices de concours de type pédagogique.

Les titres de chapitre[31] laissent apparaître un découpage plus fin que les précédents, où l'instituteur en fonction ne retrouve plus **ses** mathématiques, puisque apparaissent des notions dont l'étude comme objets de savoir dépasse le cadre de l'école : l'ouvrage cherche à étendre la culture mathématique du lecteur, hors du strict champ des mathématiques de l'école élémentaire[32].

Il nous semble que les titres de chapitres de ces trois séries d'ouvrages mêlent plusieurs types de savoirs selon la transformation que les auteurs opèrent sur les savoirs mathématiques

---

28

Tome 1	Tome 2	Tome 3	Tome 4
- Problèmes - Géométrie	- Maternelle - Grandeur et mesure	- Numération - Décimaux	- Nombres et opérations - Géométrie

29 Le concours externe des professeurs d'école comporte une épreuve écrite de mathématiques de trois heures, composée de deux parties (cf. arrêté du 11/03/91 relatif aux épreuves et aux recommandations au jury). La première partie, notée sur 12 points, doit permettre de juger des compétences scientifiques du candidat dans la discipline ; le candidat analyse des situations et résout des problèmes. La seconde, sur 8 points, évalue les capacités d'analyse des "approches didactiques et des démarches pédagogiques correspondantes" ; le candidat analyse et critique des documents pédagogiques relatifs à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

30 cités tels quels dans l'ouvrage : les mots "théorique" et "pédagogique" font là référence aux deux parties distinctes du concours (cf. ci-dessus), la première est appelée "théorique" et la seconde "pédagogique".

31

- Les ensembles de nombres et les techniques opératoires - Calcul littéral - Equations et inéquations à une inconnue se ramenant au premier degré - La droite. Expressions du premier degré à deux inconnues - Les fonctions usuelles - Proportionnalité et pourcentages	- Les suites numériques - Arithmétique - Le théorème de Pythagore - Le théorème de Thalès - Des polygones au cercle - Mesure, périmètres, aires et volumes - Géométrie dans l'espace

32 Un exemple : le problème classique de trouver un nombre de pièces de monnaie de chaque valeur pour un nombre total de pièces fixé et une valeur fixée (par exemple 32 pièces de 5 F et 2 F pour faire 97 F, comme dans *Comment font-ils*, brochure I.N.R.P. 1984, Rencontres pédagogiques n°4, pages 34 à 64) est un problème du cycle 3, notamment pour évaluer les compétences de raisonnement des élèves. Il relève pourtant d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, notion mathématique qui n'est, à aucun moment, l'objet d'un enseignement à l'école élémentaire.

à enseigner à l'école. En effet, on trouve des formulations sous forme de savoirs à enseigner à l'école (exemple géométrie dans l'espace, techniques opératoires), de savoirs savants sous-jacents aux savoirs à enseigner (les ensembles de nombres, classement, rangement,...) et des savoirs savants qui étendent les savoirs à enseigner, qui accroissent la culture mathématique de l'étudiant sans nécessairement une finalité d'enseignement, du moins sous leur aspects généraux (par exemple suites arithmétiques, équations et inéquations...). Bien sûr ces titres ne constituent pas à eux seuls les contenus de formation, mais ils participent à la publicité des savoirs de formation : l'étudiant trouvant le libellé "inéquations" dans un manuel de formation s'inquiète de ne pas le retrouver explicitement dans un autre ; il peut aussi tenter de projeter à son idée cette notion dans les mathématiques de l'école élémentaire.

Cette brève étude permet de constater que, d'une part la définition des savoirs de formation n'est pas si simple, d'autre part la présence d'un concours en milieu de formation semble introduire des compléments de formation en culture mathématique (cf. le troisième ouvrage cité) relevant en gros du programme de mathématiques de troisième des collèges, et finalement modifie la transformation des savoirs d'enseignement en savoirs de formation. Les items mathématiques cités semblent pour certains en plus faible corrélation avec les mathématiques de l'école élémentaire, mais, par contre, contribuent à une culture mathématique plus spécialisée de l'étudiant.

f. Exemple de proposition d'une rédaction de contenus mathématiques de formation pour les professeurs des écoles

La COPIRELEM[33] a rédigé un texte sur une demande ministérielle pour préciser les contenus de formation des futurs professeurs d'école. Les entrées choisies sont les suivantes (voir annexe B, page 287 le texte complet) accompagnées par des sous-titres.

- La construction du nombre et des opérations arithmétiques[34]
- Fonctions numériques
- Extension de la notion de nombre entier
- Géométrie
- Grandeur, mesure.

---

[33] Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire.

[34] Le paragraphe complet est le suivant.

- La construction du nombre et des opérations arithmétiques

Notions mathématiques, historiques, épistémologiques nécessaires à cet enseignement sur :
- nombre entier et numération ;
- structures additives ;
- structures multiplicatives.

Analyse et construction de situations d'apprentissage.

Elaboration de procédures de calcul (calcul mental, algorithmes écrits des opérations arithmétiques, utilisation de la calculatrice) : analyse mathématique et didactique.

La transposition sur les savoirs d'enseignement réalisée ici est fortement marquée par les dernières recherches en didactique. L'esprit développé par cette rédaction est de centrer la formation autour d'unités plus spécifiquement mathématiques, mais regroupées selon des principes didactiques (notamment celui de champ conceptuel). Bien entendu la composante pratique n'apparaît pas explicitement dans cette rédaction, cela ne diminue pas pour autant son importance.

Nous adhérons complètement à ce type de rédaction : en effet, il nous semble qu'elle permet de caractériser plus précisément le type de connaissances souhaitables pour un professeur des écoles. Cependant les principes de sa rédaction ne sont pas encore unanimement partagés, ce qui rend son utilisation pour une étude globale peu adaptée.

g. Conclusion

Nous avons pu constater la diversité des rédactions liées à ce que nous avons appelé savoirs de formation en mathématiques. Pour nous lancer dans la description d'un projet global de formation, nous avons cependant besoin de références explicites.

Dans la mesure où notre travail nous amène à dialoguer avec divers partenaires qui ne disposent pas encore de toute l'information (la formation ?) didactique nécessaire à la compréhension de certaines formulations influencées par la didactique, dans la mesure où une grande diversité de rédaction peut être liée à la recherche des "savoirs savants" utiles à l'enseignement, nous choisissons un découpage des savoirs de formation autour d'une formulation classique et reconnue par tous les acteurs du système éducatif, un découpage presque "médiatique", sans effet apparent de la didactique : nous choisissons comme entrées les savoirs à enseigner à l'école.

Les différentes entrées de ce découpage, que nous précisons ci-dessous, seront appelées thèmes mathématiques tout au long de notre travail.

A Nombre entier	**F** Rationnels et décimaux	**J** Géométrie plane des figures
B Addition	**G** Opérations sur décimaux	**K** Géométrie plane des transformations
C Soustraction	**H** Fonctions numériques	**L** Géométrie des solides
D Multiplication	**I** Mathématiques et maternelle	**M** Mesure
E Division		

Ce découpage est d'ailleurs celui qui a été historiquement le plus utilisé dans la formation en mathématiques pour le premier degré, sans doute parce qu'il "colle" bien aux mathématiques de l'école élémentaire, mais aussi parce qu'il prend en compte globalement la pluridisciplinarité du recrutement de formés : en effet les futurs maîtres ne sont en général pas des spécialistes des mathématiques, bien au contraire ; la formation de première année devra se charger de compléter les connaissances mathématiques des formés avant de lancer ceux-ci dans une réflexion plus professionnelle, elle comprendra donc nécessairement des réajustements sur les thèmes mathématiques de l'école.

Une réflexion sur l'organisation de ces savoirs en savoirs de formation sera une de nos préoccupations, dans la mesure où elle est une des tâches fondamentales du formateur.

2. Sur le projet global de formation

a. Les divers points

Le formateur construit un projet global de formation pour son public. Il nous semble que ce projet repose sur plusieurs points :

- les objectifs que le formateur a pour son public, qu'ils soient mathématiques, méthodologiques, didactiques, généraux,... ;

- la connaissance des diverses contraintes liées à son enseignement

  * les contraintes institutionnelles : les programmes, les modes d'évaluation, les lieux de formation, le temps imparti pour la formation,...

  * les contraintes temporelles : la répartition de la formation dans le temps (séances éclatées ou regroupées, séances courtes ou plus longues, temps global sur une année, sur deux semaines,...),

  * les contraintes épistémologiques : type de savoirs à enseigner, structuration de ces savoirs dans l'édifice des mathématiques ou dans l'ensemble des savoirs didactiques ou pédagogiques,...

  * les contraintes cognitives (nature cognitive de l'apprenant) : la connaissance que l'on a de ce que les étudiants savent, ont oublié, sont capables d'apprendre,...

- les leviers sur lesquels il peut jouer pour trouver un équilibre entre la formation de ses étudiants et son enseignement : on pense immédiatement au choix de stratégies, mais aussi au type d'évaluation mis en place (dans la mesure où elle n'est pas imposée institutionnellement).

- le rôle des autres disciplines d'enseignement : le formateur de mathématiques n'est pas le seul, le formé reçoit un enseignement dans plusieurs domaines, dont certains plus généralistes, qui influent sur ses conceptions de l'enseignement et sur la réceptivité qu'il manifeste au discours du formateur

- le rôle de la composante pratique : le formateur sait que son discours sera adapté, modulé car le maître en formation aura l'occasion de côtoyer des maîtres titulaires, de se forger sa propre idée de l'enseignement des mathématiques lors des stages sur le terrain. C'est le produit de cette adaptation qui constituera la véritable formation en mathématiques du futur maître.

b. La place du formateur

Ces différents points ne dépendent pas tous uniformément du formateur : les deux derniers notamment ne sont pas du tout de son ressort, il n'en sera pas ou peu question dans notre étude. Notre idée est de préciser les liens entre les leviers sur lesquels le formateur peut agir compte-tenu de ses options, et les contraintes qu'il doit respecter, plus exactement d'analyser comment les contraintes agissent sur les leviers. Nous ne prendrons pas en compte de façon significative les contraintes institutionnelles et temporelles, nous plaçant dans une absence de programme national et sur un temps moyen d'une soixantaine d'heures de formation la première année. Mais ce sujet étant encore très vaste, nous nous limiterons à trouver des critères de choix de stratégies, à montrer que celles-ci peuvent être fortement dépendantes des contraintes épistémologiques et cognitives.

A notre connaissance une telle réflexion sur la notion de projet global est nouvelle. Les publications actuelles ne présentent que des faits éclatés (voir les *Actes des Colloques* des Professeurs d'Ecole Normale ou les *Documents pour la formation des professeurs d'école* dont nous reparlerons par la suite) ou un catalogue des divers thèmes mathématiques nécessaires à l'enseignement à l'école, sans décision ni indication sur l'ordre de traitement.

Remarquons en cela le décalage entre les travaux concernant l'école élémentaire et la formation des étudiants : si les programmes de l'école élémentaire se contentent de recenser les thèmes dont l'étude est obligatoire, sans donner quelque indication de traitement que ce soit, par contre chaque auteur de manuel scolaire prend une décision quant à l'ordre de présentation de ces notions, à leur degré d'éclatement[35] et à la démarche associée : la soustraction peut venir au CE en début, milieu ou fin d'année, peut être présentée de façon continue ou éclatée, etc. Pour le moment, en ce qui concerne les enseignements en formation des maîtres, aucun ordre de ce type n'est explicitement pris en compte.

c. Conclusion

Un projet global de formation est donc conçu comme une juxtaposition, peut-être même une mise en réseau de situations de formation, ces situations étant rattachées aux thèmes précisés dans le premier paragraphe de ce chapitre. Notre idée est donc de s'interroger sur le type de juxtaposition, les thèmes de référence et les démarches associées des diverses situations qui constituent un projet global, pour viser une certaine efficacité dont nous précisons ci-après les critères.

3. Sur l'efficacité de la formation

Dans l'idée de construction de projet, nous visons bien sûr une certaine efficacité, un certain impact sur les étudiants. Comment définir cette efficacité ?

---

[35] Selon l'auteur, la notion est présentée en peu ou beaucoup de leçons, avec peu ou un grand nombre de phases intermédiaires : par exemple la division euclidienne dans N peut être envisagée dans certains manuels sous la suite : division par un nombre de un chiffre d'abord exacte, puis avec un reste non nul, puis par un nombre de deux chiffres, etc.; alors que dans d'autres la première leçon pourra débuter sur la recherche d'un quotient et d'un reste non nul d'une division d'un nombre de quatre chiffres par un nombre de deux chiffres.

Essentiellement par une augmentation des connaissances mathématiques et des compétences professionnelles des étudiants. Mais déjà cette expression est à relativiser. En effet pour être opérationnelle, cette efficacité doit être évaluable. Comment cette question a-t-elle été traitée par les écoles normales, puis les I.U.F.M. ?

a. Evolution de l'évaluation des écoles normales aux I.U.F.M.

Plus que de l'augmentation des connaissances, il serait plus correct de parler d'un niveau minimum de connaissances exigé pour "obtenir le module de mathématiques", lui-même constitutif du diplôme d'instituteur ou maintenant de professeur d'école. En effet la formation, dans son ensemble, est pensée en secteurs disciplinaires qui bénéficient, institutionnellement, d'une évaluation reconnue ou non. Les stages que les étudiants effectuent sur le terrain sont eux aussi évalués et cette évaluation est constitutive de la décision finale. L'obtention du diplôme repose sur l'ensemble de la formation, c'est-à-dire sur les deux années.

Les formateurs de mathématiques déterminent donc des épreuves d'évaluation qui leur semblent les plus propices à repérer les qualités mathématiques de futurs enseignants, ou plus exactement les incapacités impardonnables ; les autres formateurs font de même dans les autres disciplines, les évaluations sur le terrain ayant pour but de voir si l'étudiant a su faire la synthèse entre les diverses formations pour réaliser un enseignement correct.

En première année, dans les écoles normales, les stages avaient beaucoup moins d'importance pour l'évaluation, ils aidaient cependant à déceler les candidats qu'il était souhaitable de repousser pour incompatibilité avec des classes d'enfants. L'évaluation était continue, mais n'était, sauf cas pathologique, prise en compte que la deuxième année, tant existait l'idée que la formation ne pouvait produire "de l'évaluable" qu'après deux ans de formation et des essais sur le terrain.

La présence du concours en fin de première année change sensiblement les données du problème : les étudiants doivent exhiber des connaissances professionnelles dès la première année, le correcteur doit tenir compte du fait que la formation est en cours et se poursuivra. Les épreuves du concours pourraient certes servir d'évaluation de mi-parcours, mais elles ne sont jamais reprises avec les élèves, statut des copies de concours oblige. Le concours ne peut donc pas, me semble-t-il, :

- permettre une évaluation objective de la formation (dans son ensemble),
- donner des indications individuelles exploitables sur les étudiants, la note seule étant un trop maigre renseignement.

b. Conclusion

Nous définirons donc l'efficacité de la formation par la reconnaissance de l'impact sur les étudiants qu'en a le formateur : enrichissement des conceptions des étudiants, augmentation sensible de leurs connaissances disciplinaires et professionnelles testée par des devoirs, des bilans ou des pratiques, confort du formateur dans sa relation au groupe des formés. Nous limiterons d'ailleurs l'étude de cet impact sur les étudiants de première année. Nous ne ferons donc pas appel à une évaluation externe. Cette évaluation restera interne au centre de formation. Il ne s'agit pas de vérifier l'état des compétences sur le terrain des étudiants après leurs années de formation. L'impact sur les étudiants à l'intérieur du centre est de toute façon une condition nécessaire à une efficacité externe au centre. Elle n'est bien sûr pas suffisante, mais les moyens que nous nous donnons ne nous permettent pas d'aller au delà.

B. Questionnement et méthodologie

L'essence de notre travail est une réflexion sur la construction d'un projet global de formation. Le sujet étant vaste, nous avons déjà présenté certaines des limites que nous lui imposions. Plus précisément nous nous posons les questions suivantes :

- existe-t-il dans les pratiques des formateurs un ordre de présentation privilégié des thèmes mathématiques de la formation ?
- existe-t-il des préférences "stratégiques" chez les formateurs dans l'absolu ou en liaison avec les thèmes mathématiques précités ?

Chercher des éléments de réponse à ces questions nous amène à dresser un état des pratiques des formateurs, donc une sorte de réserve dans laquelle le formateur peut puiser.

Ensuite, pour rendre fonctionnelle cette réserve, nous cherchons des critères, en liaison avec les éléments de réponse aux questions précédentes, qui permettent au formateur de faire des choix dans cette réserve pour construire un projet global de formation. Enfin, nous essayons d'expliciter quels types de "croyances" déterminent la mise en ordre de ces critères que décide le formateur.

Les divers constituants des pratiques des formateurs nous sont fournis par l'analyse de plusieurs éléments. D'abord une étude succincte de plans de formation liés à l'autonomie des I.U.F.M. nous montre que ces plans ne sont pas un bon matériel d'étude. Nous transportons donc notre questionnement auprès de formateurs en exercice par le biais d'un questionnaire sur leurs pratiques. Nous complétons cette interrogation par l'étude d'écrits de formation parmi les Actes des colloques des professeurs de mathématiques des écoles normales, des publications de la C.O.P.I.R.E.L.E.M. et de certains ouvrages récents. Enfin et surtout nous analysons notre propre pratique, nos propres habitudes avec l'aide des outils de la didactique. C'est ce qui nous fournit le point de départ de la plupart de nos questions.

Pour la recherche de critères de choix pour le formateur, nous testons par un autre questionnaire les relations des étudiants aux différents thèmes mathématiques de la formation. Nous postulons enfin que les attitudes des maîtres titulaires et des rédacteurs de manuels scolaires face à ces thèmes peuvent avoir une influence sur les choix du formateur ; nous expliquons dans quelle mesure. Nous terminons notre étude par une dernière hypothèse : la liste de critères que nous avons déterminée est ordonnée, mise en réseau par le formateur selon ses "croyances" en matière de formation et cette organisation des critères détermine la trame de son projet de formation. La présentation de notre propre organisation de cette liste de critères et du projet de formation que nous y associons illustre cette hypothèse.

Présentation du plan

Ce travail est constitué de trois parties.

Dans la **première partie**, nous présentons un état des lieux des réflexions des chercheurs en sciences de l'éducation, sciences sociales et didactique des mathématiques sur la formation des enseignants en général, du premier degré en particulier : comment la problématique actuelle de la professionnalisation des enseignants amène les chercheurs à s'interroger plus finement sur les pratiques, en cherchant d'une part à définir des savoirs théoriques, d'autre part à porter un regard ethnographique[36] sur certains enseignants ; quelles sont les spécificités du métier de formateur et en quoi la programmation de son enseignement est une des tâches importantes de sa fonction ; où en sont les recherches qui se préoccupent d'une analyse des pratiques des formateurs de professeurs d'école en mathématiques, en particulier des stratégies de formation. Cet état des lieux nous permet de constater le peu d'études menées sur la formation professionnelle en mathématiques des maîtres du premier degré. Il nous conduit à nous tourner vers les pratiques.

La **deuxième partie** dresse un état des pratiques du formateur de mathématiques de premier degré, depuis l'expérience des écoles normales jusqu'à aujourd'hui. Il s'agit de décrire des habitudes pour la programmation d'un enseignement, sans tenir explicitement compte du formé dans un premier temps : existence ou non d'un ordre de présentation des thèmes mathématiques plus communément partagé (ce que nous testons par l'étude des réponses à un questionnaire de formateurs), thèmes et/ou stratégies privilégiés, relations entre thèmes et stratégies, etc. (ce que nous analysons sur notre propre pratique et dans divers écrits de formation en mathématiques au métier de professeur d'école). Les éléments de réponse que nous accumulons nous permettent de proposer une utilisation possible de stratégies en liaison avec des thèmes. Nous illustrons cette proposition par une progression thématique effectivement pratiquée, la mesure des grandeurs en première année de formation des professeurs d'école.

Dans la **troisième partie**, nous précisons des critères de choix pour le formateur parmi les éléments explicités dans la deuxième partie : ces éléments s'appuient sur les formés, et nous clarifions certains rapports au savoir des formés aux thèmes mathématiques à travers un questionnaire sur les conceptions qu'ont les formés de leurs forces et de leurs manques. Cette clarification nous permet d'ailleurs de valider certaines des hypothèses émises dans la deuxième partie. Nous proposons une autre source pour les critères de choix du formateur : du côté de la prise en compte des réactions du terrain. Les éléments répertoriés dépendent du

---

[36] cf. "A quoi pensent les chercheurs quand ils pensent aux enseignants", François V. Tochon (1992), *Revue Française de Pédagogie* n°99, pages 89 à 113.

thème mathématique choisi. La façon dont ces différences sont prises en compte donne lieu à des constructions différentes de projets de formation.

La **conclusion** résume ce travail, en précise les limites et les portées possibles. Elle propose une application possible de ce travail, en aval (aide à l'analyse) ou en amont (aide à la construction) d'un projet global de formation. Elle pose d'autres questions pour toute formation mathématique dans le premier degré, en modulant selon le degré d'expérience professionnelle des formés, et propose quelques pistes d'adaptation pour le second degré, tout en soulevant de nouveau le problème de la définition d'une culture professionnelle minimale et de son évaluation.

Première partie

ETAT DES LIEUX

Un aperçu sur le contexte de recherche

1. La professionnalisation des enseignants

L'heure est à la professionnalisation des enseignants même si ce n'est pour certains qu'un mythe. R.Bourdoncle développe dans son article[37] des arguments pour et contre cette professionnalisation. De toute façon c'est un mythe nécessaire, dans la mesure où il est porteur d'énergie. Nous reprenons la conclusion de son second article.

> "Il faut croire, prudemment et lucidement, aux idées, aux histoires et aux mythes. Ils nous captent, mobilisent nos énergies et c'est ainsi qu'ils deviennent vrais. Un peu plus vrais."

Qu'est-ce à dire de la professionnalisation ?

Pour une reconnaissance sociale plus forte, c'est la transformation d'un métier (à tendance artisanale, plus proche d'un art) en une profession, fondée sur des savoirs théoriques et une technicité spécifique. La référence professionnelle est souvent le médecin, qui s'appuie sur un corps de connaissances scientifiques en constante évolution, mais dont le métier valorise la part personnelle, surtout dans les relations humaines. Le professeur serait reconnu comme l'expert en éducation comme le médecin est l'expert en santé.

Cette professionnalisation n'a qu'un seul but : moderniser l'école, améliorer son efficacité. Nous sommes conscients avec A.Trousson[38] qu'atteindre un tel but par la formation des maîtres repose sur la croyance à une corrélation forte entre la rationalisation de la formation et une amélioration de l'efficacité éducative. Notre position institutionnelle ne peut que nous encourager dans cette voie. Nous n'avons ni l'intention, ni les moyens de vérifier sa pertinence.
Mais elle nous engage aussi dans la professionnalisation du métier de formateur.

L'existence d'un caractère professionnel se fonde sur des savoirs théoriques capables d'orienter la pratique. Qu'en est-il de ce savoir théorique sur l'enseignement ? Il est en voie de constitution, même si des désaccords subsistent sur sa nature (s'agit-il de savoirs scientifiques ?) : les résultats de la didactique des mathématiques en constituent une partie, d'autres sont à chercher dans les sciences de l'éducation. Nous ne pensons pas que ces savoirs seuls permettront de décrire les pratiques d'enseignement, loin de nous la tentation de négliger, entre autres, la composante personnelle dans l'action enseignante, la part de bricolage, d'improvisation (mais réglée toutefois) soulignée par P.Perrenoud[39] . Nous

---

37 R.Bourdoncle, "La professionnalisation des enseignants", Note de synthèse de la *Revue Française de Pédagogie* en deux parties : n°94, janvier 1991 et n°105, octobre 1993.
38 A.Trousson, *De l'artisan à l'expert, La formation des enseignants en question*, 1992, CNDP, Ed Hachette
39 P.Perrenoud, *La formation des enseignants. Entre théorie et pratique*, 1993, Ed L'Harmattan

n'affirmons pas non plus que les pratiques d'enseignement pourront être connues un jour d'une manière absolue. Mais nous pensons (cf. A.Trousson[40]) qu'il est possible d'augmenter la part de savoir scientifique.

2. Comment peut se constituer ce savoir théorique ?

L'analyse des savoirs en formation d'adultes, mentionnée dans l'introduction de notre travail (dans la clarification sur les savoirs de formation), nous ont déjà permis de mentionner un processus de théorisation des savoirs pratiques, cité par G.Malglaive. D'autre part, la didactique a fourni un effort de théorisation de l'étude du processus enseigner-apprendre autour du savoir et de ses modes d'appropriation. La théorisation des savoirs sur l'enseignement semble donc être en marche, même si rien ne dit qu'elle sera totale.

Mais qu'en est-il de l'étude de la transmission de ces savoirs ? Autrement dit quels éléments possède-t-on d'une théorie de la diffusion, de la communication, non plus des savoirs disciplinaires (qu'ils soient mathématiques, biologiques, linguistiques, etc.), mais des savoirs sur le processus d'enseignement-apprentissage de cette discipline ? Or, plus encore pour des savoirs en voie de constitution, la transmission joue un rôle important. Les chercheurs en sciences, que ce soit en mathématiques, biologie, etc. ont dû d'autant plus se préoccuper de la communication la plus adéquate des résultats de leurs recherches que ceux-ci étaient originaux par rapport à la science en cours ; ainsi les "découvreurs" ne peuvent-ils ignorer la nécessité et les contraintes de la diffusion.

Les chercheurs en didactique ont donc là un sujet de recherche fondamental : la didactique se préoccupe de la transmission des savoirs pour l'enseignement, mais elle doit aussi s'intéresser à la transmission des connaissances didactiques ; pourra-t-on un jour parler de "la didactique des savoirs sur l'enseignement", peut-être même d'une "didactique de la didactique" ?

Sur cette transmission des savoirs sur l'enseignement, les sciences de l'éducation ont commencé à s'interroger, avec leur spécificité plus pédagogique (au sens de M.Altet). Mais peu de recherches spécifiques ont été effectivement menées sur la transmission des savoirs sur l'enseignement des sciences, plus particulièrement en mathématiques. Les premiers travaux permettent de décrire des ingénieries de formation (par exemple la thèse de M.Pézard[41]), ou de constater des habitudes ou régularités dans les pratiques des formateurs, tel le travail d'A.Kuzniak[42]. C'est aussi la perspective que nous avons choisie.

---

[40] A.Trousson, idem.

[41] M.Pezard (1985), *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs*, Thèse de 3$^{\text{ième}}$ cycle, Université de Paris 7.

[42] A.Kuzniak (1994), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7

Notre travail consiste donc à nous poser comme praticien de la communication d'éléments sur l'enseignement des mathématiques en formation initiale et à analyser notre pratique, visant à repérer des régularités, à confronter des habitudes aux études déjà menées, etc. Nous adoptons en cela la démarche de la didactique qui a constitué des concepts en remarquant, analysant, théorisant les régularités de l'enseignement.

Pour constater ces régularités, nous utilisons une approche narrative, cherchant d'abord à analyser notre propre pratique. Reprenons la citation de B.Schwartz[43], déjà reprise par G.Malglaive[44]

> "Toute pratique est une intelligence des choses. Dès qu'elle se systématise, se réfléchit, s'organise et se gère, elle prend rang dans une visée théorique."

Nous nous engageons ainsi dans une visée théorique, par la description et l'analyse de pratiques.

3. Notre travail et la notion d'enseignant expert

Est-ce dire que nous nous proposons comme formateur expert[45] ? Oui et non...

Oui, parce que jusque là peu d'interrogations ont porté sur les pratiques de formation et que les premières descriptions peuvent apporter des pistes à la communauté. Non, parce que nous sommes chercheurs sur nous-mêmes, donc nous ne pouvons nous qualifier d'expert, au risque de ne nous soumettre qu'à nos propres jugements.

Nous relativisons donc une approche narrative et phénoménologique[46] en enrichissant nos propositions de celles d'un groupe de formateurs d'enseignants du premier degré. D'autre part nous soumettons cette approche au filtre de la didactique qui nous fournit des outils d'étude pour nous décentrer et prendre un recul nécessaires sur nos propres pratiques.

En résumé donc, nous utilisons des éléments de didactique pour étudier des pratiques de formateur de maîtres du premier degré en mathématiques, nous espérons contribuer à enrichir les conceptions sur ces pratiques et à clarifier les décisions du formateur pour la construction d'ingénieries, dans une perspective de professionnalisation du métier d'enseignant, a fortiori de celui de formateur.

Cette professionnalisation passe en effet par la mise en évidence de savoirs théoriques propres à la formation, savoirs théoriques qui, nous semble-t-il (par une analogie audacieuse avec la genèse de la didactique des mathématiques), ne pourront se constituer que par la recherche de régularités de formation ou d'habitudes de formation. Certains pourront revendiquer le respect d'une chronologie dans les préoccupations : il serait plus sage d'attendre

---

[43] B.Schwartz (1977), *Une autre école*, Ed Flammarion, Paris.
[44] G.Malglaive (1990) *Enseigner à des adultes*, page 75, PUF, Paris
[45] A.Tochon, *L'enseignant expert*, 1993, Ed Nathan
[46] A.Tochon, idem, p.50-51.

que les savoirs sur l'enseignement "classique" soient répertoriés pour envisager des savoirs théoriques sur la formation. Nous postulons que des recherches simultanées seront plus riches que des recherches ordonnées, compte-tenu des similarités connues entre le métier d'enseignant et celui de formateur.

PROFESSIONNALITE	COMPETENCES PROFESSIONNELLES	PROFESSIONNALISATION
I. Connaissances liées à l'identité disciplinaire Histoire-Epistémologie Didactique Approche disciplinaire	1. Organiser un plan d'action pédagogique 2. Préparer et mettre en oeuvre une situation d'apprentissage	**I. Analyser des pratiques pédagogiques** T.P. de didactique (ex. : analyse comparée des modes de transmission)
II. Connaissances relatives à la gestion des apprentissages Histoire Pédagogie-Didactique Psychologie Psychosociologie Sociologie de l'éducation Approche par objectifs	3. Réguler son déroulement et l'évaluer 4. Gérer des phénomènes relationnels	**II. Formation par alternance dans les établissements scolaires** 1/ Observation 2/ Situation : préparation puis mise en oeuvre de situations pédagogiques 3/ Responsabilité (savoir construire, organiser, moduler les situations d'apprentissage)
III. Connaissance du système éducatif Philosophie de l'éducation Politique de l'éducation Histoire de l'éducation Economie de l'éducation	5. Fournir une aide méthodologique 6. Favoriser l'émergence de projets professionnels positifs	**III. Participation au travail d'équipe** **IV. Stages en entreprise** (pour les PLP2 et les professeurs de matières techniques)
	7. Travailler avec des partenaires	**V. Mémoire professionnel**
Les trois pôles de connaissances liés à la professionnalité sont à relier aux sept compétences professionnelles, de même que les cinq facteurs de la professionnalisation.		

Le "Cahier des charges" [47] (ci-dessus) de la profession enseignante établi par A.Trousson d'après le rapport Bancel définit l'architecture des compétences professionnelles, en quelque sorte les compétences de l'enseignant expert.

Ce "cahier des charges" est celui de la profession enseignante en général, mais d'autres écrits développent des spécificités pour des catégories d'enseignants plus particulières. Ainsi un document de janvier 1994 de la Direction des Ecoles définit un référentiel de compétences et capacités pour le professeur des écoles, dans une perspective pluridisciplinaire bien sûr (cf. annexe C, page 289). A quand un Cahier des charges du formateur ? Il est toujours possible de tirer des deux catalogues précédents des indications puisque le formateur d'enseignants du premier degré est aussi un enseignant qui se doit de former en respectant le référentiel du professeur des écoles.

Nous essayons auparavant dans le chapitre suivant de mieux cerner des spécificités du métier de formateur.

[47] A.Trousson, ibid. page 46-47

Quelques spécificités du métier de formateur

L'analyse précédente considère le formateur de mathématiques comme un enseignant à part entière, transmettant des contenus et évaluant sa formation. Essayons de préciser ce qui le différencie d'un enseignant "classique" de mathématiques (nous ferons des comparaisons avec des enseignants transmettant du savoir disciplinaire, dans la mesure où les formateurs de mathématiques dans les IUFM sont à l'origine des professeurs de mathématiques). Voyons en quoi la formation d'enseignants du premier degré a des spécificités.

1. Le formateur d'enseignants du premier degré en mathématiques

a. Côté des savoirs

Pour un enseignant classique, le savoir est arrêté par les programmes. Les manuels scolaires le transposent en projet d'enseignement, puisqu'ils découpent, réorganisent le programme sur l'année scolaire et livrent un produit qui se veut le plus fini possible, c'est-à-dire qui minimise les prises de décisions de l'enseignant avant son cours.

Pour le formateur d'enseignant, comme nous l'avons déjà noté dans l'introduction, aucun savoir n'est parfaitement arrêté, qu'il s'agisse de savoirs mathématiques (pour le sujet qui nous intéresse) ou de savoirs liés à l'acte d'enseigner. Du côté des savoirs mathématiques, la nécessité d'enseigner amène un retour sur ces savoirs et un enrichissement sous de nouveaux angles[48]. Quant aux savoirs non strictement mathématiques liés à l'acte d'enseigner, ils sont multiples et ne sont pas toujours définis précisément, leur transmission (puisqu'il s'agit encore d'un enseignement de savoirs sur l'enseignement) fait elle-même partie de ces savoirs ; il est donc licite (au sens des habitudes des formateurs) de faire le choix de ne pas dissocier ces savoirs de leur transmission. Tout cela confère une spécificité au formateur, dans sa définition des savoirs de formation, dans "l'organisation de son plan d'action pédagogique", si nous reprenons l'expression du rapport Bancel. Cette spécificité est aussi disciplinaire, dans la mesure où il doit d'abord effectuer un travail de transposition sur du savoir disciplinaire. Elle relève donc de la didactique de la discipline en question, ici les mathématiques. Une autre question pourra alors se poser :

"les savoirs pertinents pour être enseignés sont-ils pertinents pour agir?"[49]

---

[48] Par exemple, une bonne connaissance de la division euclidienne passe par la compréhension de la genèse de l'algorithme de calcul usuel.

[49] G.Malglaive (1990) *Enseigner à des adultes*, page 69, PUF, Paris

b. Côté des formés

Les formés adultes ou plus exactement "les preneurs de formation"[50] ont un rapport au savoir différent de celui des adolescents ou des enfants : le savoir n'a de sens pour eux que s'il permet de résoudre des problèmes dans une situation quotidienne ou professionnelle[51]. Ainsi pour le "preneur de formation", le sens du savoir se transforme en sens du savoir dans la pratique.

A priori on pourrait penser que les attentes et les besoins de formation des étudiants des IUFM tournent d'abord autour de questions professionnelles : mais là il nous semble utile de distinguer plusieurs différences entre étudiants ou stagiaires : il y a ceux pour qui les mathématiques ne posent pas de problème, ils ont même quelquefois choisi cette discipline ou une proche comme spécialité (ils ont une licence en mathématiques) ; il y a ceux pour lesquels subsistent des "coins obscurs", même sur des notions mathématiques d'école élémentaire. Les premiers sont relativement prêts à se livrer à des études de situations effectives (observations et pratiques) de classes de mathématiques pour enrichir leur réflexion sur leur futur métier (qu'ils se destinent au professorat des écoles ou des lycées-collèges), les autres ont quelquefois tant de lacunes mathématiques à combler que toute interrogation de type professionnel les amène à réapprendre d'abord des mathématiques, ce qui perturbe ou détourne leur réflexion de l'objectif lié à l'acte d'enseigner qu'on avait fixé pour eux. Ainsi certaines formations professionnelles pensées pour la formation du second degré ou la formation continue trop tournées vers les pratiques (voir par exemple les exemples de réflexion active sur les pratiques proposées par M.Altet[52]) ne peuvent, nous semble-t-il, et sous leurs formes actuelles, être projetées sur la première année de formation mathématique des professeurs d'école, dans la mesure où ceux-ci doivent d'abord maîtriser un minimum de savoirs mathématiques qui leur permette l'élaboration d'un projet de classe mathématique. Une des constantes du public des formés se destinant au professorat des écoles est, en effet, du moins jusqu'à ces dernières années, d'avoir de faibles compétences mathématiques. Ce qui explique pourquoi il nous semble que la formation que nous avons à mettre en place, comme formateurs de maîtres du premier degré en mathématiques est si spécifique[53].

De même que l'heureux détenteur du permis de conduire n'est pas encore un conducteur chevronné puisque les kilomètres parcourus augmenteront son expérience, de même l'instituteur sortant de la formation avec son diplôme en poche ne connaît pas encore toutes les

---

[50] G.Malglaive (1990)- *Enseigner à des adultes,* page 39, PUF, Paris- reprenant une expression de D.Hameline.
[51] B.Charlot (1976), "Dis moi ce que tu comprends, je te dirai qui tu es", *Education Permanente* n°47, page 6.
[52] M.Altet (1994) -*La formation professionnelle des enseignants,* page 17 et suivantes, Collection Pédagogie d'aujourd'hui, Editions PUF.
[53] pour une description plus fine de la spécificité de ce public, voir l'analyse d'A.Kuzniak (1994), pages 33 à 41, dans *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7

ficelles de son futur métier. Il n'est détenteur que d'un "permis d'enseigner"[54], puisqu'il a été jugé détenteur du bagage minimal pour enseigner, déterminé par le centre de formation dont il relève. La formation d'adultes a cette particularité qu'elle ne se termine pas dans le centre de formation, mais qu'elle est enrichie, remodelée, déformée par les régulations effectives du terrain. Quelquefois même elle se perd ![55].

Puisqu'ils ne pouvaient "boucler" la formation à l'intérieur du centre, certains formateurs des écoles normales, dont je fais partie, ont travaillé à préparer chez les étudiants une réceptivité maximale à tout ce qui leur paraissait aller dans le sens d'un enseignement moderne, notamment démarches et méthodes. En effet :

> "on peut se demander si, par delà les problèmes strictement financiers, les échecs successifs et répétés de certaines expériences de formation des maîtres ou de changements dans l'enseignement, précédées de textes qui nous paraissent excellents, toujours actuels (mais pas toujours appliqués), ne sont pas à relier à des problèmes de discordance de "longueurs d'onde" entre les émetteurs et les récepteurs, que ce soit au niveau de l'institution ou des individus: une partie des "malentendus" nous semble se placer précisément au niveau des conceptions sur les mathématiques et leur apprentissage, notamment en ce qui concerne les réponses (explicites ou explicitables) à des questions comme : qu'est-ce que les mathématiques, à quoi elles servent, comment les faire apprendre et même que veut dire apprendre les mathématiques...".[56]

Ces formateurs abordent donc, pour une meilleure efficacité, une réflexion spécifique sur les conceptions[57] des étudiants. L'enrichissement de ces conceptions peut alors devenir un objectif de formation à part entière, et ce d'autant plus que les étudiants, loin de concevoir les mathématiques ainsi :

> "L'activité principale en mathématiques, dans le cadre scolaire ou chez les chercheurs professionnels consiste à résoudre des problèmes, à poser des questions."[58]

n'ont qu'un seul modèle pédagogique de référence.

> "Cette pédagogie utilise essentiellement et dans l'ordre invariable la méthode "j'apprends, j'applique". (...). Il s'agit en effet d'une présentation de notions mathématiques que l'élève doit apprendre, suivie de problèmes ou exercices d'applications fabriqués pour que l'élève puisse utiliser ce qu'il a appris sans transformation. De plus, il doit le faire selon des règles du jeu qui ne sont pas toujours explicitées mais qui servent de référence pour évaluer son travail. Souvent le maître "montre", l'élève n'a qu'à "faire pareil".[59]

La plupart des étudiants en première année de formation ont été profondément marqués par ce type de pédagogie ; ils en conservent une idée très particulière du "faire des

---

54 selon l'expression de D.Butlen

55 Certains parlent même de "dé-formation" professionnelle, cf. *Vers une formation des enseignants au développement et à la gestion de projets : une alternative à la "déformation" professionnelle ?* Mémoire de licence de psychopédagogie présenté par Etienne Bourgeois, 1981, directeur J.M.de Ketele.

56 *Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement,* A.Robert et J.Robinet, Cahiers DIDIREM n°1, mars 1989, Université de Paris 7

57 Le mot "conception" sera pris dans tout le texte avec le sens défini dans la citation précédente

58 *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*, Régine Douady, Thèse de doctorat d'état, Université de Paris 7, 1984

59 idem

mathématiques" (voir en annexe D, page 290, des exemples d'opinions d'étudiants avant formation FP1 87/88).

Le formateur devra donc prévoir de mettre en défaut cette conception erronée[60] de l'enseignement pour permettre à l'élève de s'adapter aux nouvelles propositions.

2. L'expérience des écoles normales

L'expérience de la formation en école normale laisse supposer qu'un des paramètres de la modification des conceptions des apprenants est la durée du temps de formation. Notre appréciation qualitative (mais partagée et renouvelée chaque année) de l'efficacité des formations montre l'importance croisée de deux paramètres sur la réceptivité du public :

- d'une part leur connaissance du terrain, plus exactement leur conscience, souvent par l'exercice sur le terrain, de l'existence de lacunes dans leurs connaissances disciplinaires et didactiques et de la nécessité de compléments,
- d'autre part leur investissement personnel dans une réflexion sur le "comment on apprend ?", "comment apprend l'enfant ?", etc.

La transformation des écoles normales en IUFM a permis de conserver, pour certains, deux ans de formation. La première année est en principe réservée au concours, du moins pour les disciplines obligatoires du concours, mais compte-tenu de cette nécessité de temps long d'appropriation, à notre avis, elle ne peut être consacrée uniquement à la préparation au concours, elle doit comporter une véritable part de formation professionnelle. C'est aussi la conviction d'un grand nombre d'ex-professeurs d'école normale. Il nous semble qu'elle doit être considérée comme une véritable première année de formation professionnelle, avec la communication d'un certain nombre de contenus mais aussi un enrichissement des conceptions. Ce qui nous semble actuellement difficilement évaluable par un concours. En ce sens une continuité peut s'opérer avec les formations antérieures, continuité modifiée par la présence du concours. Un bon nombre de formateurs tentent ainsi de former leurs étudiants "plus" que ne l'exige le concours : ils ne souhaitent pas se limiter à un bachotage systématique, qui consisterait par exemple à multiplier les devoirs individuels écrits, ils continuent à les intéresser à des travaux de groupe, à des exposés devant la classe, à des préparations effectives de séances de classe, etc. toutefois dans la mesure où ils ont pu négocier ce type de démarche avec leurs étudiants.

D'ailleurs on constate qu'en deuxième année, un certain nombre d'étudiants intégrés en candidats libres se trouvent vierges de ce type de réflexion et d'une réceptivité toute différente.

---

[60] Cette conception est plus communément partagée par les nouveaux formés ;se rencontrent, lors de stages de formation continue, des instituteurs qui développent d'autres conceptions, soit par une formation antérieure qui les a déjà fait réfléchir sur ce thème, soit par des lectures actualisées, soit par une pratique particulièrement réfléchie de la classe.

Les différences entre étudiants avec première année et réelle formation professionnelle et étudiants sans première année sont d'ailleurs telles que l'institution elle-même (par exemple certains IUFM dont celui de Rouen) en a pris conscience et, après deux ans de fonctionnement commun, regroupe systématiquement pour une formation spécifique (depuis la rentrée 1993) tous les étudiants sans première année, et ce malgré la complexification de l'organisation qui en découle. C'est un symptôme (institutionnel !) de la reconnaissance de l'importance d'une première année effective de formation et/ou de l'insuffisance d'une réussite à **ce** type de concours.

Bon nombre de formateurs conçoivent donc la première année comme la première étape d'une formation professionnelle en deux ans. C'est également ce principe que nous adoptons. C'est pourquoi quel que soit le mode de recrutement, nous parlerons de formation professionnelle pour la première année, pas de préparation au concours, même si la réussite au concours (du moins à l'épreuve mathématique du concours) peut constituer un élément d'évaluation de la réussite de la formation en mathématiques[61]. L'étude à laquelle nous nous consacrons porte donc plutôt sur une première année de formation en mathématiques de novices.

Le cahier des charges de la profession enseignante défini antérieurement cite la planification de l'enseignement comme une des premières compétences : construire un plan d'action pédagogique se présente comme une des premières tâches de l'enseignant. C'est aussi une des premières tâches du formateur, et ce, d'autant plus, que la détermination du savoir qu'il a à transmettre reste relativement à sa charge. A priori cette planification comporte plusieurs points dont la détermination, le choix et l'organisation des contenus de formation, ce que nous nommons la programmation. Elle s'appuie sur des outils de la didactique, notamment pour mettre en place une mise au point satisfaisante des savoirs de formation. Le formateur se doit donc a priori de mieux cerner ses propres pratiques sur ce point.

---

[61] Des devoirs de type concours font partie des évaluations que nous pratiquons sur les connaissances mathématiques et professionnelles de nos étudiants.

Etat des lieux sur la programmation d'un enseignement

Du temps des écoles normales, des directives nationales fixaient les contenus de formation pour les promotions principales des écoles (celles recrutées sur concours et entrant immédiatement après la réussite au concours dans les centres de formation). Le dernier texte national détaillé est celui de 1986[62] qui précisait le programme de mathématiques pour les étudiants recrutés avec le DEUG et formés en deux ans avec 135 heures de mathématiques sur environ 1300 heures de formation théorique obligatoire[63].

Ce document (fourni en annexe E, page 292) propose une définition des savoirs de formation mathématique des futurs instituteurs. On y trouve une répartition en quatre rubriques, soit relevant de notions mathématiques, soit éclairant certains aspects de l'enseignement (aspects de psychologie cognitive, de didactique, de pédagogie). L'informatique y tient une place à part entière, sans doute dans la vague informatique des années 1985 (plans "Informatique pour tous"). L'organisation plus fine de ces programmes restait du domaine privé de l'école normale, voire du formateur qui les mettait en acte, il n'existe donc pas de document officiel précisant quel projet de formation était issu de ces programmes. La décentralisation effectuée par la transformation des écoles normales en IUFM et la présence d'un concours portant sur les contenus de la première année de formation a rendu publiques les organisations des contenus de première année des divers IUFM, puisque les étudiants non inscrits en IUFM doivent être renseignés sur ces contenus pour pouvoir préparer le concours en candidats libres. Ce qui nous a permis d'avoir à notre disposition des plans de formation en mathématiques pour la première année.

1. Caractéristiques de l'étude des plans de formation

Comme nous l'avons précisé dans notre partie introductive, une première lecture nous a fait constater des différences importantes de rédaction, voire de contenus effectifs dans ces divers plans. Nous avons donc choisi d'en étudier seulement quatre : Aix, Caen, Nantes et Rennes (cf. annexe F, page 293), cette étude devant nous permettre d'illustrer ces différences et de m'interroger sur leur origine. Ces quatre plans nous ont en effet semblé relativement caractéristiques des différences de rédaction qui caractérisent l'ensemble, même s'ils ne contiennent pas, à eux quatre, toutes les différences. Toujours est-il qu'ils illustrent assez bien, à notre avis, la grande variété.

Nous avons utilisé cinq rubriques pour cette étude.

---

[62] JO du 28 mai 1986

[63] à laquelle s'ajoutaient 100 heures d'approfondissement optionnel et les stages sur le terrain, les stages en tutelle occupant 3 fois 81 heures et ceux en responsabilité 216 heures.

- Tout d'abord le chapeau général (code IG), les intentions déclarées des formateurs pour ce plan : nous avons été sensibles à la déclaration des objectifs de la première année de mathématiques. S'agit-il de préparer à un concours ou déjà au futur métier d'enseignant, en générant une réflexion qui ne peut se limiter à une réussite à des épreuves sans réelle mise en situation ? Les contenus forment-ils deux parties séparées, partie mathématique et partie plus didactique et pédagogique, ou le découpage proposé insinue-t-il des allers et retours permanents entre ces deux "parties" ?

- Le concours comportant une partie mathématique (résolution d'exercices) et une partie dite didactique (où l'étudiant doit montrer des premières capacités de futur enseignant), le programme de certains plans limite quelquefois les contenus sous-jacents à la partie didactique. Nous avons essayé de pointer cette limitation en terme de cycles (cycles des apprentissages premiers -maternelle-, des apprentissages fondamentaux -Grande section de maternelle, CP, CE1-, des approfondissements -CE2, CM1, CM2-) (code CE).

- Nous nous sommes intéressés bien sûr au découpage mathématique proposé (code MA). Ressemble-t-il aux libellés des mathématiques de l'école élémentaire, tente-t-il se s'en libérer pour faire apparaître une rédaction de type lycée, ou adopte-t-il il une rédaction liée à une lecture didactique des savoirs à enseigner à l'école (par exemple structures additives[64] pour tout ce qui relève de l'addition et de la soustraction, que ce soit opérations ou problèmes) ?

- De la même manière, nous avons étudié la rédaction de la partie didactique (code DI), pointant les concepts didactiques nommés en toutes lettres (par exemple variable didactique, contrat, etc.) ou les expressions pédagogiques classiques (objectifs, progression, etc.).

- Enfin, et en nous référant au découpage de la partie mathématique[65] que nous avons donné dans notre introduction, justement pour rendre plus faciles les comparaisons, nous avons cherché à relever dans les plans :

  - les thèmes qui ne nous semblaient pas traités la première année (code T-)
  - les contenus mathématiques proposés par les plans et que nous n'avions pas explicitement répertoriés dans notre catalogue de départ (code T+)[66].

---

[64] Cette expression traduit une prise en compte des recherches de G.Vergnaud (*L'enfant, la mathématique et la réalité*, 1983, Editions Peter Lang) et M.Fayol (*L'enfant et le nombre*, 1990, Editions Delachaux et Nestlé) sur les opérations arithmétiques.

[65] c'est-à-dire l'ensemble de ces thèmes :

A Nombre entier	**F** Rationnels et décimaux	**J** Géométrie plane des figures
B Addition	**G** Opérations sur décimaux	**K** Géométrie plane des transformations
C Soustraction	**H** Fonctions numériques	**L** Géométrie des solides
D Multiplication	**I** Mathématiques et maternelle	**M** Mesure
E Division		

[66] En effet dans le catalogue de départ, ils sont souvent intégrés aux notions les plus proches et ne sont pas si fortement pointés.

2. Etude détaillée de ces plans

Nous avons regroupé les caractéristiques de ces plans dans le tableau ci-dessous.

	AIX	CAEN	NANTES	RENNES
IG	Didactique à partir des mathématiques Des précisions sur les supports de travail plus que sur les intentions	Pas d'indication générale Préparation aux deux parties du concours	Préambule précisant objectifs et méthodes de la formation, tant mathématiques que didactiques et précisant la liaison. Formation qui se veut professionnelle	Indications d'objectifs et de méthodes, tant mathématiques que didactiques
CE	Pas de cycle 1 pour la partie didactique	Tous les cycles pour la partie didactique	Tous les cycles pour la partie didactique	Partie didactique sur nombres décimaux
MA	Deux parties numérique et géométrique (plan), plutôt en termes de notions mathématiques, type programme de 1986	Cinq parties, allant du numérique au géométrique (même une partie écritures littérales) ; plutôt en termes de savoir-faire élémentaires.	Trois parties, numérique, géométrique et méthodologique (résolution de problèmes). Rédaction par grandes notions éclairées par la didactique	Rédaction par notions mathématiques, type collège.
DI	Pas de détail, sauf des exemples d'exercices : analyse d'erreurs, corrections de cahiers sur un support évaluation nationale CE2 6ème	Sept notions pédagogiques ou didactiques explicitement mentionnées Support : analyse de documents pédagogiques	Deux supports : documents pédagogiques et productions d'élèves. Rédaction en termes de compétences	Rédaction en termes de compétences
T+		Ecritures littérales Géométrie analytique		Dénombrement Argumentation, démonstration, rédaction
T-	Géométrie espace (sauf cube) Mesure (sauf longueurs et angles)		Transformations planes et géométrie de l'espace Mesure	Géométrie espace Opérations dans N

3. Commentaires et analyse

Ces quatre plans de formation en mathématiques pour la première année présentent donc des différences, certes au niveau de la rédaction générale et des préambules, mais aussi sur le détail des notions mathématiques et didactiques. Ainsi, à Nantes (cf. page 295), apparaissent, exprimées de façon très concise, certaines grandes notions de l'école, dont la formulation est d'ailleurs influencée par la didactique (par exemple, "structures additives et multiplicatives"). Par contre Caen (cf. page 294) propose un découpage des savoirs beaucoup plus fin qui, de par sa formulation, se rapproche davantage des rédactions de programme de collège (par exemple "mise en équation", "résolution d'équations et d'inéquations"). Aix (cf. page 293) globalise pour le module numérique (cf. "lois de composition, propriétés et techniques opératoires,"...), mais adopte un découpage relativement fin pour le module géométrique, plus proche de l'expression de savoir-faire (cf. "construction de triangles, de droites particulières dans le triangle,"...).

Ces différences, sur la partie mathématique, peuvent être significatives pour le nouveau formateur : s'agit-il de rendre l'étudiant, futur maître, compétent sur des micro-connaissances relevant de l'école ou du collège ou s'agit-il de l'aider à restructurer l'ensemble des connaissances utiles pour l'enseignement à l'école ? Choisit-on un savoir déjà prédécoupé ou une réflexion sur le découpage de ce savoir fait-elle partie de la formation ? Les intentions générales invitent d'ailleurs le lecteur de ces plans à aller dans un sens ou dans un autre.

Les parties didactiques montrent divers aspects, ce qui était plus prévisible, compte-tenu de la "jeunesse" de la didactique :

- une explicitation dure de concepts didactiques, par exemple "contrat didactique", "variable didactique", "dialectique outil-objet", à Caen,
- l'inscription dans un courant pédagogique, par exemple "définition et critique d'une pédagogie constructiviste utilisant les interactions entre pairs", à Aix,
- une explicitation de compétences du domaine de la didactique, par exemple "analyse a priori de procédures attendues de la part des élèves" à Nantes, "savoir reconnaître [...] les variables didactiques [...]" à Rennes.

4. Essai d'analyse de ces différences

Les savoirs liés à l'acte d'enseigner ne sont pas fixés, il est compréhensible qu'on en trouve des définitions différentes dans ces plans de formation. Il est aussi possible que cette variété de savoirs professionnels rejaillisse sur le choix des contenus strictement mathématiques.

Les conceptions des divers formateurs jouent sans doute un rôle non négligeable, qu'une étude fine des sujets de concours et des corrigés proposés[67] devrait permettre de préciser, et

[67] Recherche en cours de M.L.Peltier.

l'influence de ces conceptions peut aussi intervenir sur la rédaction de chacune des parties, mathématique ou didactique. On peut constater dans le tableau que des notions mathématiques ne sont pas envisagées la première année dans certaines académies, alors qu'elles le sont dans d'autres (voir la ligne T-).

Ces différences interrogent. Elles reposent sans doute sur les principes qui ont prévalu à la constitution de ces plans. Il nous semble que ces plans répondent à deux problématiques.

- La première est la suivante :

  qu'est-ce que une bonne formation professionnelle en mathématiques pour un futur enseignant du premier degré ? quelle partie réserver pour la première année ?

  Le concours est alors construit sur ces contenus et leur mise en oeuvre.

- On "sait" à peu près évaluer les connaissances mathématiques, suffisamment d'examens et de concours choisissent justement cette matière comme caractéristique d'une évaluation plus objective. Par contre l'évaluation des connaissances professionnelles est une autre affaire, sur laquelle la discussion n'est pas terminée (ne vient-on pas de supprimer, début 1994, l'épreuve professionnelle des CAPES, qui n'aura "tenu" que deux ans ?). La deuxième problématique est donc :

  que sait-on actuellement évaluer "correctement" au niveau des compétences professionnelles en mathématiques[68] par un travail écrit ?

  Il s'agit alors de construire un plan de formation sur deux ans, avec la première année une priorité aux connaissances professionnelles "évaluables", puisque ce seront celles-ci qui permettront de déceler les meilleurs récepteurs de formation mathématique et professionnelle.

La hiérarchie choisie pour ces principes peut sans doute aussi influer sur le type de rédaction des plans.

5. Conclusion

Comme nous l'avons précisé antérieurement, nous nous plaçons d'abord dans le premier cas de figure, une formation professionnelle dès la première année. Le concours peut s'intégrer comme un évaluation parmi d'autres, dans la mesure où dans certains centres (par exemple à l'école normale de Rouen), se pratiquaient déjà des évaluations écrites en mathématiques de type de celles du concours (notamment en fin de première année) ; l'évaluation mathématique complète dans le centre ne se limitait pas à un seul travail écrit, mais pouvait combiner plusieurs éléments : exposé sur une question, préparation et conduite effective de classe sur une leçon de mathématiques, etc.

---

[68] Le coefficient de mathématiques est passé de 2 sur un total de 10 pour l'admission, soit 20% de la note finale, à 4 sur un total de 14, soit 28,6% de la note d'admission, plus du quart de la note finale.

Dans cette optique et compte-tenu de leurs différences de rédaction, les plans de formation proposés par les diverses académies nous semblent un matériel difficilement exploitable. C'est pourquoi nous ne poursuivons pas cette étude[69], d'autant plus que ces plans quelquefois limités à une liste de contenus, ne fournissent que peu d'indications sur les démarches de formation utilisées, démarches qui, comme nous l'avons déjà signalé, peuvent être étroitement liées aux connaissances à transmettre liées à l'acte d'enseigner. Pour distinguer d'ailleurs ces deux aspects de la planification, nous utilisons les mots programmation (détermination et liste des contenus) et stratégies.

Nous choisissons donc de nous interroger sur la construction de projet global de formation en analysant des pratiques de formateurs, nous commençons par l'étude et l'analyse de notre propre pratique, pour poursuivre par celles d'autres formateurs. Cette construction d'un projet de formation réalise une première anticipation didactique à long terme (avant l'acte effectif de cours) que le formateur régule en fonction de sa conception de l'efficacité et de la réceptivité du public : l'étude du projet de départ et de ses régulations constitue donc un exemple "d'expérience réfléchie", au sens de P.Perrenoud.

Pour cette étude, nous utilisons une classification sur les stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques issue de recherches récentes, que nous présentons dans le chapitre suivant en y introduisant de légères modifications.

---

[69] L'étude faite a permis cependant de constater la variété des propositions et a fortiori justifie la nécessité d'une réflexion plus fine sur les contenus de formation.

L'analyse d'Alain Kuzniak

Pour une lecture plus aisée de notre travail, nous reprenons ici schématiquement la caractérisation des stratégies de formation qu'A.Kuzniak[70] a dégagées. Nous ne nous limiterons pas à celles qu'il a qualifiées de "professionnelles", nous reprenons l'ensemble en y ajoutant quelques modifications et précisions[71]. C'est ce nouvel ensemble qui nous aidera à décrire les pratiques des formateurs en mathématiques.

1. Les stratégies "moins professionnelles"[72]

a. Stratégies culturelles

Elles visent la transmission d'un savoir mathématique sans aucune référence à l'activité pédagogique, soit pour augmenter la culture mathématique des étudiants, soit plus modestement pour les remettre à niveau sur les mathématiques de l'école élémentaire.

b. Stratégies de recherche applicative

Elles visent à former les étudiants par la recherche. Ambitieuses et peu adaptées aux contraintes institutionnelles des systèmes de formation, elles représentent un idéal de formation de formateurs, mais sont en réalité très peu praticables et pratiquées pour la formation des futurs professeurs d'école.

c. Stratégies basées sur l'autonomie

Comme le nom l'indique, elles laissent une grande autonomie à l'étudiant, libre de chercher les connaissances dans les ouvrages conseillés et d'en faire part éventuellement aux autres étudiants et aux formateurs par le biais d'exposés ou de notes de synthèse.

Même si ces trois types de stratégies se rencontraient de façon occasionnelle dans les ex écoles normales, elles ne semblent pas, toujours selon A.Kuzniak, très usitées dans les pratiques des formateurs expérimentés d'enseignants.

---

[70] A.Kuzniak (1994), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7

[71] Rappelons pourquoi nous nous appuyons sur cette classification : contrairement à certaines propositions de formation s'intéressant aux caractéristiques professionnelles du métier d'enseignant, en quelque sorte indépendamment de la discipline (par exemple l'analyse des pratiques effectives des formés par l'observation en équipe ou l'utilisation du micro-enseignement), elle est, à notre connaissance, la seule proposition prenant comme objets d'études **les** stratégies de formation effectives d'enseignants **du premier degré** en mathématiques.

[72] C'est nous qui ajoutons le qualificatif de "moins professionnelles" à ce premier ensemble de stratégies, pour tenir compte de l'étude d'A.Kuzniak, qui considèrent qu'elles ne privilégient pas la professionnalisation, au contraire des stratégies décrites par la suite.

Par contre les suivantes, qu'il estime "privilégier la professionnalisation", lui paraissent coiffer les grandes dominantes des formateurs d'enseignants en mathématiques.

2. Stratégies basées sur la monstration

Elles visent la formation des étudiants à partir de sa confrontation avec le milieu de son action professionnelle future. L'observation, soit à l'intérieur d'une classe en exercice, soit à partir d'une séance enregistrée trouve une place fondamentale dans ce processus. Il est donc nécessaire que le formateur dispose de modèles et de maîtres à observer. L'objectif de ces stratégies est une transformation des pratiques de l'étudiant par l'appropriation de modèles ou le refus "d'anti-modèles", modèles qui sont regardés par les étudiants, en présence ou non du formateur.

Elles sont économiques en prérequis de la part des étudiants (connaissance des enfants, du système scolaire,..) puisque ceux-ci découvrent simultanément toutes les caractéristiques d'une classe et de son fonctionnement. Elles sont séduisantes pour les étudiants puisqu'elles font travailler en temps et lieu réels et leur font souvent rencontrer des "gens du terrain".

Elles donnent aux étudiants des modèles d'action, mais ne prévoient pas d'agir sur leurs conceptions.

3. Stratégies basées sur l'homologie

Elles sont aussi fondées sur l'imitation comme les précédentes, mais une imitation plus complexe et adaptée par l'étudiant qui est censé mettre en place un enseignement inspiré de celui qu'il a reçu comme étudiant dans le centre de formation. Le professeur tente d'utiliser avec ses étudiants un mode de transmission analogue à celui qu'il souhaite voir utiliser par ceux-ci lorsqu'ils enseigneront dans les classes élémentaires.

Très schématiquement, trois modèles de transmission semblent possibles a priori, si l'on se fonde sur les analyses actuelles du fonctionnement du système didactique Maître-Elève-Savoir :

- un modèle magistral fondé sur la relation entre Maître et Savoir ;
- un modèle relationnel fondé sur la relation entre Maître et Classe ou Elève ;
- un modèle constructiviste fondé sur la relation entre Classe et Savoir.

Comme les formateurs, dans leur majorité, sont convaincus que le savoir s'acquiert par construction et que sa transmission passe par la confrontation de l'apprenant à des situations, du moins pour les jeunes enfants, les stratégies d'homologie se limitent principalement au troisième modèle.

A.Kuzniak distingue deux types de séances d'homologie :

- celles qu'il qualifie de **directes**, dans la mesure où la situation utilisée par le formateur est très proche de celle qui est conseillée pour la classe élémentaire ; les étudiants peuvent donc vivre eux-mêmes une recherche sur laquelle ils peuvent prendre des indices non seulement de gestion de classe, mais aussi de manipulation des savoirs par le formateur, dans la mesure où les mêmes savoirs mathématiques sont visés pour les étudiants et les élèves ;

- celles qu'il qualifie d'**indirectes**, où le formateur conserve la forme, sans l'intégralité du fond : il met en scène un savoir mathématique hors du champ cognitif des élèves, mais dans celui des étudiants.

A.Kuzniak opère une deuxième séparation, transversale par rapport à la première, en deux grandes familles de stratégies :

- les unes, proches de la monstration (sous une forme indirecte) ignorent le processus de transfert qui les sous-tend : les étudiants sont confrontés à des situations mathématiques très proches de celles de l'école élémentaire (type de consignes, organisation de la classe,...) ; le formateur fait l'hypothèse implicite que les étudiants l'adapteront à la réalité de leur classe ;

- les autres sont prétextes à plus d'explicitations (détails et variantes de mises en oeuvre,..) de la part du formateur pour provoquer une certaine réflexion critique de la part des étudiants, mais l'étude du phénomène de transposition qui s'opérera ensuite de la part des étudiants n'est pas pris en compte explicitement.

Les stratégies basées sur l'homologie se fondent sur l'action des étudiants, prennent donc en compte les conceptions de ceux-ci, mais tentent d'agir sur ces dernières de façon empirique. Elles ne nécessitent pas une grande connaissance du terrain de l'école élémentaire de la part de l'apprenant, mais au contraire cherchent à donner une idée des réactions possibles du terrain par analogie avec celles des formés.

4. Stratégies fondées sur la transposition

Elles supposent l'existence d'un savoir relatif à la pratique de l'enseignement (en voie de théorisation) qu'il s'agit de communiquer à l'étudiant. Le formateur transmet ce savoir en formation, d'où l'existence d'un phénomène de transposition. Le formateur est conscient des déformations que ce savoir subit lorsqu'il est "appris" par le formé et cherche à contrôler a priori ces déformations.

Deux approches caractérisent ce groupe de stratégies :

- la première, appelée par A.Kuzniak de type pédagogique, s'appuie essentiellement sur les publications de l'I.N.R.P. ;

- la seconde, de type didactique, s'appuie sur les publications des I.R.E.M. qui ont des équipes de didactique.

Le formateur qui pratique une stratégie de transposition de type pédagogique vise à transmettre un savoir conforme à ses idées pédagogiques. Mais cette transmission ne se limite à une imprégnation, comme pour les stratégies d'homologie ; elle se complète par une explicitation des démarches pédagogiques (via des analyses de manuels, des études d'erreurs d'élèves, etc.).

Une stratégie de transposition de type didactique passe par une adaptation, à la charge du formateur, du savoir didactique auquel il se réfère, pour le transmettre aux étudiants. Cette adaptation passe par une réflexion sur les objets didactiques utiles aux futurs professeurs d'école et la construction de situations de formation permettant la transmission de ces objets.

Les stratégies de transposition nécessitent que le formateur ait une certaine expérience de la formation, mais aussi que l'étudiant ait une idée précise du fonctionnement des classes primaires et une représentation adéquate des mathématiques. Elles ne peuvent donc pas se placer en tout début de formation de novices.

5. Compléments sur cette classification

Comme le précise A.Kuzniak, ces types de stratégies ne sont pas disjointes et ce, dans deux sens :

- certaines pratiques peuvent relever de plusieurs types, on essaie alors de caractériser la stratégie dominante ;

- un formateur n'utilise pas nécessairement le même type de stratégie tout au long de son projet de formation. On peut raisonnablement penser qu'il adapte sa stratégie au public et aux objectifs de formation qu'il a pour ce public.

La classification fournie par A.Kuzniak ne préjuge pas de l'efficacité respective de chaque stratégie explicitée. Il mentionne en effet des avantages et des inconvénients de chacune, et signale même certains effets pervers de celles qu'on jugerait a priori comme les plus pertinentes parce que les plus construites : dénaturation simplificatrice de l'homologie[73] (mais sans doute par manque de prise en compte des effets de transposition), peur de créer face au caractère incontournable des "vices de construction" issue des stratégies de transposition[74], à vocation plutôt critique.

6. Comment nous utilisons sa classification

La classification créée par A.Kuzniak nous fournit une bonne base d'exploration des différentes stratégies. Cependant il nous semble que nous pouvons enrichir la liste des stratégies proposées.

---

[73] A.Kuzniak a constaté que les étudiants, formés par les stratégies d'homologie, n'hésitaient pas à proposer à leurs élèves des situations homologues à celles qu'ils avaient vécues en formation, mais mettaient en jeu un savoir si mince (par crainte que les élèves ne rencontrent trop de difficultés) qu'il ne pouvait y avoir de véritable recherche de la part des élèves.

[74] Ces stratégies utilisent souvent en effet des analyses critiques de manuels, de protocoles de séances comme support de réflexion. Elles placent les étudiants devant la difficulté du "faire".

La formation professionnelle des futurs instituteurs comporte deux niveaux, le premier lié au savoir mathématique, le deuxième aux connaissances en relation avec l'acte d'enseigner. Sont nommées stratégies professionnelles par A.Kuzniak celles qui prennent en compte explicitement le deuxième niveau (sans nécessairement négliger le premier).

a. La prise en compte de stratégies culturelles

Il est relativement clair que les contraintes de temps et de disponibilité des terrains d'application et des formateurs rendent les stratégies de recherche applicative rares, puisque nous nous interrogeons sur une formation en assez grand groupe, et que les stratégies basées sur l'autonomie sont moins intéressantes pour notre étude, parce que celle-ci est centrée sur les pratiques du formateur.

Par contre il nous semble que l'on peut considérer comme stratégies professionnelles des stratégies culturelles qui permettent de transmettre des connaissances pédagogiques, sans pour cela qu'on puisse les ranger sous l'étiquette de transposition. En effet il n'est pas rare que des séances entières de formation soient consacrées à des conseils pour la classe. Par exemple les séances qui précédent les stages de nos étudiants dans les classes sont souvent consacrées à des apports d'informations de la part des maîtres formateurs ou des formateurs sur les gestions de classes (groupe classe, matériaux de classe, relations aux collègues, parents, etc.), du type "comment organiser une leçon de mathématiques dans une classe à plusieurs niveaux", etc.. Il nous semble que de telles séances relèvent de stratégies culturelles professionnelles, dans le sens de la communication d'une culture commune aux professionnels enseignants, qui n'est ni écrite, ni en voie d'être théorisée.

Nous intégrerons donc cette dimension plus pédagogique aux stratégies culturelles. Nous distinguerons donc des stratégies **culturelles du côté des mathématiques** et d'autres **du côté des habitudes pédagogiques** (disons une culture pratique).

Nous conserverons cette dénomination de "stratégies culturelles" pour les connaissances pédagogiques, non théorisées, relevant plutôt de savoirs procéduraux locaux, communiqués tels quels aux étudiants, gardant l'expression "stratégies de transposition" pour la communication de savoirs de référence (ceux qui relèvent de l'INRP pour les connaissances pédagogiques sur les mathématiques, des diverses Ecoles de didactique pour la didactique).

b. Essai d'appréciation des différences entre les trois dernières stratégies citées sur des connaissances liées à l'enseignement

Voyons maintenant comment se différencient sur les connaissances liées à l'enseignement les trois stratégies qualifiées de professionnelles par A.Kuzniak.

Dans la monstration, le formateur suppose implicitement que les connaissances liées à l'enseignement peuvent se montrer : l'étudiant observe, et de cette observation (dans une vraie classe, sur une bande vidéo) il tire "de la connaissance professionnelle" (guidé éventuellement par le formateur).

Dans l'homologie, le formateur fait extraire ces connaissances professionnelles par l'étudiant en le mettant dans la situation d'un élève recevant un savoir du formateur. Le formateur met en scène avec ses étudiants comme élèves la méthodologie de l'enseignement qu'il conseille à ses étudiants pour leurs élèves.

Dans la transposition, les connaissances en relation avec l'acte d'enseigner constituent un corpus de référence pour le formateur, dans lequel il choisit celles devant être communiquées aux étudiants. Ces connaissances peuvent être de type didactique ou pédagogique.

Sur les stratégies d'homologie, la distinction qu'A.Kuzniak effectue entre les **homologies directes** et les **homologies indirectes** nous semble pertinente. Cette distinction nous permet de préciser une spécificité des stratégies d'homologie par rapport aux deux précédentes : en effet c'est la seule stratégie parmi les trois précédentes qui peut se permettre de transmettre simultanément du savoir mathématique directement et des connaissances liées à l'enseignement indirectement. Ce savoir mathématique sera soit du savoir visé à l'école (homologie directe), soit du savoir spécifique aux étudiants (homologie indirecte).

Il nous semble même, avec Aline Robert[75], que la famille des stratégies d'homologie peut être encore enrichie : en effet des stratégies d'homologie peuvent être construites pour transmettre du savoir mathématique aux étudiants, mais elles peuvent aussi uniquement servir à communiquer l'intérêt d'une organisation de classe particulière. Un exemple de telle séance serait une étude par les étudiants de productions de solutions d'élèves sur un problème, les étudiants travaillant en groupe, soumis à un questionnement déterminé par le formateur, devant organiser leurs réponses de groupe sur une affiche, de façon à permettre une confrontation, un débat d'abord d'opinions : si le formateur peut lors de la synthèse greffer les outils didactiques qui lui permettent de moduler ces opinions en connaissances (erreurs typiques, obstacles épistémologiques ou didactiques, etc.), cette séance bénéficiera alors d'une institutionnalisation didactique (et se rapprochera d'une séance de transposition). Mais le formateur peut aussi limiter la portée de cette séance au constat de la nécessité de la discussion, du temps de l'émergence des opinions, de la richesse du travail d'équipe. Cette séance peut illustrer l'organisation d'une classe en communauté scientifique qui débat ; l'objectif du formateur est alors que les étudiants constatent l'intérêt d'une telle organisation pour l'enrichissement de la réflexion. C'est donc une sorte d'**homologie-action,** où seule la méthodologie d'organisation de la séance est à retenir.

---

[75] A. Robert, Essai de synthèse depuis 1992 sur les modules communs en mathématiques à l'I.U.F.M. de Versailles, mai 1994.

Par contre la distinction qu'A.Kuzniak opère entre les stratégies d'homologie qui s'approchent de la monstration (en acte) et celles qui sont prétexte à plus d'explicitations de la part du formateur ne nous semble pas toujours réellement opérationnelle. En effet, dans la mesure où nous ne disposons pas de suffisamment d'assurance sur la définition des savoirs liés à l'acte d'enseigner, il est peut-être trop tôt pour parler de véritable "transposition" de ces savoirs. Une explicitation des décisions du formateur et des outils didactiques utilisés pour construire les situations choisies pour l'homologie, ainsi que des réflexions sur l'adaptation à une classe peut, nous semble-t-il, transformer une stratégie d'homologie en une stratégie de transposition. Il nous semble donc que nous pouvons considérer, d'un côté les stratégies d'homologie simple, et de l'autre, les stratégies d'homologie suivies d'une transposition. Autrement dit, la deuxième grande famille de stratégies d'homologie mentionnées par A.Kuzniak est déjà, selon nous, un croisement de deux stratégies, homologie et transposition.

D'autre part certaines séances qui relèvent d'homologie indirecte parce que le savoir visé explicitement par le formateur est un savoir didactique, le savoir mathématique étant secondaire (cf. par exemple la notion de savoir-outil et de variable didactique dans la Boîte du Pâtissier[76]) relèvent aussi de la transposition, puisque le formateur fait appel à un savoir didactique de référence. Ainsi transposition et homologie ne sont pas toujours si distinctes. Il nous semble même qu'elles ne procèdent pas exactement de la même analyse : la transposition vise à la communication de connaissances explicites liées à l'enseignement indépendamment du mode de communication alors que l'homologie s'attache à un moyen de communication indépendamment du savoir à communiquer. Finalement la distinction viendrait plus d'un changement de point de vue du formateur (ou des étudiants), plus que d'une réelle différentiation de stratégies.

[76] Houdement C., Peltier M.L. (1991) La Boîte du Pâtissier, *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 1, pp131-134, COPIRELEM Cahors, IREM de Paris 7.

Conclusion de la première partie

A l'ordre du jour dans un contexte de professionnalisation du métier d'enseignant, l'amélioration de la formation passe par l'étude des pratiques : des recherches[77] sont en cours sur les pratiques des enseignants de collèges et de lycées pour définir des savoirs liés à l'acte d'enseigner et déterminer une démarche de formation sur ces savoirs, notamment par l'analyse des pratiques. Il nous semble que, dans un premier temps, avant la définition de ces savoirs, cette démarche ne peut concerner que la formation continue, dans la mesure où il est nécessaire d'avoir effectivement une pratique pour être prêt à une analyse des pratiques. Quant à nous, nous nous interrogeons sur une formation initiale qui, de plus, concerne un public a priori non spécialiste de la discipline sur laquelle nous souhaitons le former. Quelles démarches utilisent les formateurs pour la formation du premier degré en mathématiques, constituée d'une part d'une mise à niveau, d'autre part d'une formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ? Pour obtenir quelques éléments de réponses, et en l'absence d'un cadre théorique sur la transmission des savoirs liés à l'enseignement en formation initiale, nous nous tournons aussi vers des pratiques, mais cette fois-ci, de formateurs.

Ces pratiques recouvrent plusieurs aspects : d'une part la construction d'ingénieries de formation[78], mais aussi et d'abord la détermination de contenus et d'une progression de formation, a fortiori le choix de contenus pour la première année.

L'étude des pratiques commence donc par celle des projets globaux de formation qui les régissent. Sur ces projets, les écoles normales sont riches d'habitudes, mais il existe peu de traces écrites officielles[79]. Les I.U.F.M., soumis à la contrainte ministérielle de rédiger des plans de formation académiques, ne proposent souvent que des catalogues de contenus disciplinaires sans livrer beaucoup d'indication sur la communication des savoirs liés à l'acte d'enseigner. Une réflexion spécifique sur la construction d'un projet global se doit donc de partir directement des pratiques des formateurs sur cette construction.

Dans la première partie, nous avons dressé un état des lieux des recherches sur la formation des enseignants, essayant de montrer que la formation des enseignants du premier degré reste un domaine peu exploré. L'étude des pratiques des formateurs de ces publics peut donc

---

[77] Par exemple, M.Altet (1994), *La formation professionnelle des enseignants*, Collection Pédagogie d'aujourd'hui, Editions PUF.

[78] Par exemple, en mathématiques, la thèse de M.Pézard (1985), *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs*, Thèse de 3$^{\text{ième}}$ cycle, Université de Paris7, qui la première a pointé la spécificité de "double-institutionnalisation" des savoirs mathématiques et didactiques, liée à la formation en mathématiques dans le premier degré ;
en biologie la thèse de P.Antheaume (1993), *Contribution à la définition des objectifs spécifiques et des activités spécifiques de formation professionnelle d'enseignants non spécialistes dans une discipline scientifique : la biologie*, Thèse de doctorat, Université de Paris 7.

[79] dans la mesure où la conception de ces projets reste interne à l'équipe de formateurs de mathématiques.

enrichir la réflexion. Notre domaine de spécialité étant les mathématiques, nous centrons sur ce domaine la réflexion sur la formation. Nous avons aussi précisé quels outils nous aideront à analyser, dans la deuxième partie, les pratiques des formateurs sur les projets de formation.

Deuxième partie

UN REGARD SUR LES PRATIQUES DU FORMATEUR

Introduction

Présentation de la deuxième partie

Une réflexion sur les pratiques des formateurs de mathématiques du premier degré peut démarrer par un regard sur sa propre pratique : en effet, j[80]'exerce depuis 1986 comme professeur de mathématiques en école normale, transformée en 1991 en IUFM. Tous les ans j'ai été impliquée dans la formation des étudiants de première année. Pourtant je n'ai ni toujours choisi les mêmes thèmes de formation, ni suivi le même ordre de présentation des thèmes au fil des années, même à contraintes institutionnelles équivalentes (temps de formation, répartition dans le temps, taille des groupes, type d'évaluation,...).

La première hypothèse que je formule dans cette partie est que le formateur expérimenté cherche un certain confort de formation en jouant sur plusieurs variables
- certes les stratégies qu'il utilise pour former ses étudiants
- mais aussi l'ordre de présentation des différents thèmes qu'il traite (et sans doute aussi l'intitulé des entrées qu'il choisit -disciplinaire ou didactique-, mais cela ne sera pas résolu dans cette thèse...)

Dans la première partie du premier chapitre, j'illustre cette hypothèse par le descriptif de ma propre évolution sur six ans, montrant qu'au cours des années et au fil des transformations, mon ordre de présentation des thèmes a atteint une certaine stabilité, à contraintes équivalentes.

Dans la deuxième partie de ce même chapitre, je teste l'hypothèse qui émerge de la première : y aurait-il un ordre de présentation des notions mathématiques plus communément partagé par tous les formateurs ? Si oui, correspond-il au mien ? Peut-on alors parler d'ordre idéal de formation ? Peut-on trouver des justifications, des explications à ces choix communs ?

Le **premier chapitre** me permet ainsi de dresser un état des pratiques des formateurs sur l'ordre de présentation des thèmes qu'ils utilisent pour la première année.

Cette étude m'amène à formuler une deuxième hypothèse : existe-t-il des stratégies attachées à certains thèmes ? Certains thèmes ne sont-ils envisageables qu'avec une seule stratégie ? Existe-t-il un choix stratégique pour d'autres thèmes ?

J'étudie dans le détail deux thèmes particuliers, la division et la proportionnalité, et je jette un regard d'ensemble sur tous les autres thèmes.

---

[80] J'utiliserai dans cette partie le **je**, du point de vue du formateur, gardant le **nous** pour le point de vue du chercheur.

C'est l'objet de mon **deuxième chapitre** qui se conclut par la présentation d'hypothèses sur une certaine efficacité des différentes stratégies.

Dans le **troisième chapitre**, j'illustre par le détail d'une progression une des stratégies que je juge la plus efficace en première année de formation, en précisant certaines conditions.

L'ensemble des éléments de réponses contenus dans ces trois chapitres me permet de présenter **un état des pratiques de formateurs**, pour la formation en mathématiques des enseignants du premier degré. Cet état est celui d'une époque charnière, d'un côté qui prolonge les habitudes des écoles normales, de l'autre qui se place en rupture avec celles-ci, par la présence d'un concours en fin de première année.

Limites de la méthodologie choisie pour cette étude

Sur ma propre histoire

Se choisir comme propre objet d'observation est une gageure difficile. Je resterai donc modeste dans les conclusions que je tirerai de cette étude. Cependant cette position présente de multiples avantages : une connaissance interne du système dans lequel on évolue, une prise en compte plus fine des possibles décalages entre prévisions et réalités, une disponibilité permanente du sujet d'étude et de sa mémoire.

Les descriptions faites dans la première partie du premier chapitre (chapitre 1, I) sont des descriptions d'**enseignant** qui essaie d'expliciter les raisons de ses divers choix et changements de choix ; elles vont bien sûr être une matière importante de la réflexion de didacticien que je souhaite mener, mais elles ne prétendent à aucune exhaustivité, ni scientificité. Les documents qui m'ont permis de me remémorer ces progressions sont mes différents cahiers de texte, où j'ai l'habitude de consigner les prévisions, déroulements et bilans (le mien et celui de mes étudiants que j'ai pris l'habitude de faire faire systématiquement à l'issue de chaque formation) de chacun de mes exercices annuels. Je relaterai donc les descriptions des progressions globales (quels thèmes et dans quel ordre) que j'ai traitées au fil des années, en analysant les raisons des variations d'une année sur l'autre. Je fournirai quelques annexes plus détaillées comme illustration du traitement décrit de tel thème.

Les titres utilisés pour décrire globalement les étapes des progressions sont plutôt les notions *mathématiques* du programme (excepté pour la maternelle). Ces intitulés recouvrent une partie de compléments mathématiques mais aussi des aperçus pédagogiques et didactiques, dont seuls certains aspects apparaîtront ici. Ils recouvrent en partie les thèmes répertoriés au début de l'ouvrage pour l'analyse de la formation, et intègrent d'autres notions, dont l'étude faisait plus partie des habitudes des formateurs que maintenant (compte-tenu de la rédaction des programmes de l'école élémentaire de ces années).

Mes objectifs d'apprentissage pour cette formation ont été explicités dans la première partie.

Sur les déclarations des formateurs

La forme d'interrogation que j'ai choisie (demande aux participants du colloque national des formateurs de mathématiques des IUFM de mai 1993 de remplir un questionnaire sur le temps du colloque) me permet de toucher un grand nombre de formateurs exerçant les mêmes tâches que moi et simultanément de limiter mon enquête aux formateurs s'intéressant suffisamment à leur métier pour venir ici échanger avec leurs pairs (bien que les candidatures soient limitées, tous les postulants ont été retenus cette année-là à ce stage national).

L'étude devrait me permettre de vérifier si cette notion d'ordre que j'ai pu constater sur ma propre pratique se retrouve dans celles de mes pairs et quelle importance elle y revêt, donc d'objectiver et de relativiser certaines affirmations faites à partir de ma propre pratique ; en ce sens, elle est plus travail de **didacticien** que la précédente.

Je considère que les autres formateurs se placent dans les mêmes hypothèses d'apprentissage que moi, compte-tenu des programmes et instructions pour l'école élémentaire délivrés par les instances nationales.

Sur la recherche de relations entre thèmes et stratégies

C'est par l'analyse de mes propres pratiques sur plusieurs années et celle d'écrits de formation d'autres formateurs, sous l'éclairage de la didactique, que je souligne des relations habituelles chez les formateurs entre thème et stratégie.

Ceci contribue à dresser une "carte de la formation", née des expériences réfléchies, où certaines associations entre thème et stratégie semblent plus naturelles.

Les pratiques sur l'ordre de présentation

I. Description de mes progressions

Je considérerai mes différentes progressions à partir de l'année 1986, cette année-là étant déjà ma troisième année en école normale : j'ai en effet bénéficié d'une délégation rectorale d'un an à l'école normale de Rouen en 1984-85, je suis retournée exercer dans un collège pendant les deux années suivantes (le poste n'étant plus placé en délégation rectorale), puis j'ai été nommée définitivement à l'école normale en 1986-87, avant de suivre le stage de formation d'un an (1987-88) lié au contrat de formateur. L'année 1986-87 n'a donc pas les "défauts" d'une première année d'enseignement dans un niveau donné. De plus, à partir de la rentrée 1986, et jusqu'en 1991, apparaissent les premières promotions dites FP, recrutées avec le DEUG ou l'équivalence[81], ayant droit à une formation de 135 heures de mathématiques entre autres (nous avons évoqué le programme dans l'introduction générale), réparties sur deux années (soixante-dix heures effectives la première année et environ quarante heures la deuxième dans l'Académie de Rouen) avec un programme fixé . L'évaluation de leur formation est strictement interne à l'école normale qui s'adjoint la collaboration des inspecteurs départementaux et de leurs conseillers. Elle intervient la deuxième année et repose sur des validations positives des différents modules de formation et de leurs stages en tutelle et en responsabilité.

D'autre part, dans notre école normale, les groupes de FP restaient inchangés d'une année sur l'autre, si bien qu'en cas de changement de professeur de mathématiques, le professeur de la seconde année recevait de celui de la première année la liste des contenus traités avec des indications de traitement, pour assurer une continuité entre les deux années.

A. Année 1986-87

Les séances sont de deux heures à raison de deux par semaine environ, avec des interruptions de trois semaines (deux dans l'année), pour des stages en tutelle (l'étudiant est dans une classe élémentaire avec le maître titulaire et fait certaines leçons, en accord avec celui-ci) . J'ai donc mené en parallèle deux thèmes jusqu'aux vacances de février, puis ai poursuivi avec un seul thème sur quatre heures par semaine.

[81] Les promotions antérieures classiques étaient recrutées avec le baccalauréat, pour une formation de trois ans.

1. Description des contenus

Je citerai assez succinctement les différents contenus, laissant au lecteur le soin de consulter les annexes ou les documents complets (donnés par leurs références bibliographiques) pour plus de détails sur les activités qui me semblent les plus caractéristiques de la formation dispensée. Pour une bonne lecture, il s'agit plutôt de suivre l'évolution de la liste des thèmes mathématiques retenus au fil des années et l'analyse des changements que je propose.

Arithmétique

Calcul mental : les multiples de 5, 10, 3, congruences modulo 3, les multiples de 6, de 9,...critères de divisibilité, nombres premiers, les preuves.(cf. annexe G, page 297)

Dénombrements, récurrence et récursivité (le jeu "les tours de Hanoï"), exercices d'arithmétique visant à rappeler les propriétés des nombres entiers.

Classement, rangement : rappels des propriétés de ces relations et de leur importance dans la construction des connaissances mathématiques à travers des activités de maternelle (cf. annexe H, page 299).

Eléments de construction du nombre entier (mathématiques et pédagogiques).

La numération.

Les opérations :

- étude d'une opération non numérique ; généralités sur les opérations ;
- la multiplication à l'école : analyse didactique d'une séance décrite par écrit[82] ;
- la soustraction à l'école : les problèmes additifs[83], exemple de progression,...

Fonctions linéaires, affines, propriétés des écarts, de linéarité à travers l'étude de tableaux de nombres en correspondance.

Géométrie

Mise en situation sur des activités "homologues" à celles praticables à l'école élémentaire pour se remémorer les propriétés géométriques des figures et des solides, donner du sens à l'expression "faire des mathématiques, faire de la géométrie à l'école". Les activités sont :

- "assemblages de triangles équilatéraux" sous une forme moins élaborée (cf. annexe I, page 302) ;
- "le solide caché" (cf. annexe J, page 304) ;
- "message sur dessin géométrique"[84].

[82] Protocole de classe pages 284 à 290, dans *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, CE tome 2,* ERMEL, Ed Hatier.

[83] d'après Vergnaud G. (1981) : *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Ed. P.Lang, Berne, pages 131 à149.

[84]d'après "Jeux de télégrammes", page 180, *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, CM tome 3,* ERMEL, Ed.Hatier.

Les autres notions étaient abordées en deuxième année (la mesure à travers celle des aires, la division, les nombres autres qu'entiers, les fonctions numériques).

Les évaluations internes au cours de mathématiques se composaient d'un devoir sur table comportant une partie mathématique et une partie plus pédagogique (analyse de documents ou d'une séquence) sur les thèmes traités en cours et d'un dossier de stage, décrivant la préparation, le déroulement, l'analyse des productions éventuelles et le bilan d'une ou plusieurs séquences faites à l'occasion des stages en tutelle.

2. Analyse des contenus

Le partage en deux parties, numérique et géométrique, me permettait d'aborder deux grands thèmes de front : l'un privilégiant davantage la réflexion pédagogique (en géométrie) notamment sur les démarches à mettre en place dans une classe élémentaire par transfert des démarches vécues en cours par les stagiaires, l'autre cherchant à élargir et à éveiller la curiosité mathématique des stagiaires en les faisant chercher quelques problèmes d'arithmétique relativement classiques pour finalement compléter et revoir des propriétés élémentaires des nombres entiers. Progressivement d'ailleurs au cours de l'année, la démarche utilisée pour la partie numérique a rejoint celle de la partie géométrique, privilégiant plutôt la méthodologie de l'enseignement que les contenus, du moins en classe (des exercices mathématiques étant donnés à chercher à la maison, pour contrôler les connaissances mathématiques, et corrigés en classe s'ils avaient posé problème).

B. Année 1987-88

Cette année-là deux professeurs de mathématiques sont intervenus dans chaque groupe, chacun deux heures par semaine, selon une répartition des thèmes décidée collégialement. Notons que, dans notre établissement, nous choisissons ce type de répartition quand un nouveau collègue, sans expérience ni de l'école élémentaire, ni de la formation professionnelle... se joint à nous, de telle manière à minimiser les effets négatifs de "débutant dans le métier de formateur". Mon collègue présentait une vision "plus mathématique" des thèmes et j'étais chargée du côté plus pédagogique de la question. Cependant au fil de l'année, ce clivage s'est amoindri.

La progression fut la suivante, les séances de mathématiques étant réparties dans l'année comme précédemment.

1. Description des contenus

Présentation des programmes des étudiants et de l'école. Bref historique de l'évolution des programmes de l'école élémentaire depuis 1887[85].

---

[85] Sources : les programmes et instructions officielles de l'école de 1923, 1945, 1970 et 1985.

Classement, rangement : rappels mathématiques et activités de maternelle (cf. année précédente).

Géométrie plane : activité de message sur dessin géométrique (cf. année précédente), prétexte à un aperçu sur la géométrie à l'école et des rappels mathématiques.

Préparation respective des groupes à leur stage tutelle : familiarisation avec le contexte d'une classe de maternelle ou de CE ou de CM (selon les groupes) ; qu'observer dans une classe ; comment s'intégrer dans l'école,...

L'addition : rappels des propriétés et exemples de progressions en CP et CE1.

Géométrie plane : une autre activité, "assemblages de triangles équilatéraux" (cf. année précédente) ; autres rappels mathématiques.

La soustraction : étude des programmes, des manuels ; étude de procédures d'élèves; éléments pour une progression.

2. Analyse

Certes il me semble constater cette année là des changements dans la réceptivité à mes cours par rapport à l'année précédente ; mais les étudiants ont apprécié le partage du cours collectif en deux parties dans la mesure où ils bénéficiaient de deux points de vue sur les mathématiques.

Désormais je me contenterai de décrire les thèmes mathématiques envisagés sans trop m'étendre sur d'éventuelles séances de préparation aux stages en tutelle ou d'exploitation au retour de ces stages, mon but étant essentiellement d'examiner l'évolution de l'ordre des thèmes mathématiques étudiés en première année. Je ne décrirai plus non plus la deuxième année, celle-ci étant consacrée aux thèmes restant, tous ou seulement quelques-uns, compte-tenu du temps choisi pour chacun et de leur impact sur les étudiants.

C. Année 1988-89

Toutes les séances (une par semaine mais de quatre heures) se découpent selon le plan suivant :

- activités préalables de calcul mental, entre quinze et quarante minutes, visant à rappeler et préciser les propriétés d'arithmétique classiques (cf. année 1986-87) ;
- cours du formateur, très souvent sous forme d'une mise en situation des étudiants, suivie d'une analyse et d'un exposé du formateur ;
- exposé d'un groupe de deux étudiants sur un thème faisant l'objet d'une leçon ou d'une suite de leçons dans un niveau donné d'école élémentaire, préparé hors classe, avec conseils bibliographiques éventuels du formateur ; remarques de la classe et du formateur.

Je vais donc préciser les thèmes choisis pour le cours du formateur.

1. Description des contenus

- Historique des programmes de l'école élémentaire de 1887 à nos jours. Vestiges dans les pratiques actuelles des programmes périmés.
- La division : mise en situation autour du jeu Concertum[86], rappels mathématiques sur la division, préparation et observation d'une séance dans des CM1 où les élèves résolvent un problème de division sans connaître de technique a priori, synthèse des observations à partir des protocoles, compléments didactiques.
- Géométrie : une séance préparée avec le maître titulaire (sur la construction d'un puzzle géométrique, le Tangram), et réalisée dans une classe de CM1 avec un demi-groupe d'étudiants, l'autre partie étant en voyage d'étude ; une séance collective avec les étudiants du type "message sur dessin géométrique" (déjà cité les années antérieures) suivi d'explicitations du formateur sur la démarche suivie et de rappels mathématiques.
- Aperçu sur les mathématiques en maternelle, les démarches préconisées et les modes d'organisation de classes, en collaboration avec une maîtresse d'application de grande section (en préparation d'un stage tutelle)[87].
- De nouveau de la géométrie plane avec une mise en situation des étudiants, son exploitation didactique et d'autres compléments mathématiques.
- La construction du nombre : éclairage mathématique et sur les apprentissages des jeunes enfants ; conséquences pour la classe de CP et de CE1.
- Etude des numérations, conséquences pour l'enseignement du "compter".

2. Analyse

La responsabilité du cours de mathématiques m'étant totalement échue cette année-là, j'ai conçu une progression en rupture avec celle des années antérieures à partir du deuxième cours, car la progression précédente me m'avait pas apporté toute satisfaction. En effet j'avais trouvé que les étudiants de l'année précédente avaient mis beaucoup de temps à comprendre la problématique actuelle de l'enseignement des mathématiques, notamment pour l'introduction d'une notion, que je résumerais par : proposer aux élèves des problèmes suffisamment consistants pour qu'ils s'y investissent, que la classe échange à propos des méthodes de résolution et que la synthèse permette d'extraire la notion d'apprentissage visée. L'analyse du dysfonctionnement que j'en avais alors faite considérait que le premier thème élu (Classement- Rangement) n'était pas un premier thème propice à cette réflexion parce que :

- il ne correspond pas à un savoir suffisamment repéré par les étudiants, trop marginal face à leurs idées a priori sur les connaissances mathématiques de l'école élémentaire ;

---

[86] voir H.Péault, La division en formation initiale, dans *Actes du Colloque de Rouen (1988)*, IREM de Rouen.

[87] Les activités menées dans la classe de grande section de maternelle de cette maîtresse donneront lieu plus tard à une brochure : *Du Petit Ballon au Jeu de Cible,* M.Bidon, C.Houdement, M.L.Peltier (1992, I.R.E.M. de Rouen)

- il permet difficilement de mettre en place des situations intéressantes pour les étudiants et cependant transférables aux élèves sans trop de modifications ;
- il nécessite, pour une meilleure compréhension, une connaissance minimale des élèves des petits niveaux, ce qu'il est illusoire, à mon avis, d'attendre de jeunes adultes (tout au plus, me semble-t-il, peut-on supposer un peu de connaissance sur le CM).

C'est pourquoi j'ai choisi de commencer par le thème de la division, qui se place, à mon avis, en opposition avec les remarques que j'ai faites précédemment. De plus, j'ai été confortée dans ce choix par des discussions avec des formateurs d'autres IUFM sur l'impact de tel ou tel thème, traité de telle façon, pour espérer atteindre une meilleure compréhension et adhésion au type de démarches d'enseignement que nous souhaitons voir mettre en place par nos étudiants.

Parallèlement j'ai conservé la géométrie, car j'avais réussi à "faire passer des choses" ("plus professionnelles") à travers l'étude de ce thème qui permettait des mises en situation, puis des synthèses mathématiques et didactiques ; de plus c'est une partie des mathématiques qui rebute et effraie les étudiants, dont il est grand temps d'assurer la réhabilitation, si l'on souhaite que le cercle vicieux de la "peur de la géométrie" ressentie par les enseignants qui se transforme en "peur de la géométrie" ressentie par les élèves" se rompe.

La progression d'ensemble s'est aussi localement pliée aux demandes liées aux divers stages des étudiants dans les classes.

D. Année 1989-90

Ce fut le même type de démarrage que l'année précédente pour une même répartition et une même organisation des séances sur l'année.

1. Description des contenus

- Un aperçu sur les programmes,
- De la géométrie plane, combinant mises en situation et compléments mathématiques et didactiques,
- La division avec la même progression,
- Un aperçu sur la maternelle et la place des mathématiques en maternelle (placé avant le stage en tutelle en maternelle),
- Le nombre entier et la numération, cours complété par une visite dans un CP pour observer une leçon numérique et constater les aptitudes des élèves à compter,
- De nouveau de la géométrie plane,
- La multiplication sous ses aspects mathématiques et didactiques (propriétés, algorithmes, étude de manuels).

2. Analyse

Cette année-là il n'y eut pas de transformation radicale de la progression : en effet, les bilans de fin d'année 88-89 des étudiants avaient été globalement positifs et ma perception du processus de formation, complétée par quelques visites faites à des étudiants lors des stages sur le terrain, relativement bonne.

E. Année 1990-91

Il y eut cette année le même type de programmation institutionnelle des séances, mais sans exposé en classe préparé à la maison, cette partie ayant créé l'année précédente des mécontentements d'étudiants : ceux-ci m'avaient dit, lors du bilan terminal, se sentir peu concernés quand ils n'avaient pas eux-mêmes préparé l'exposé, et, pour optimiser l'efficacité des cours, préférer se confronter à la tâche avant d'écouter des compléments sur le sujet.

D'autre part, certains ayant apprécié de découvrir un autre visage des mathématiques et une autre façon de l'enseigner que celle dont ils se remémoraient, j'ai décidé de les faire réfléchir plus systématiquement sur les mathématiques et leur enseignement. Le chapeau global de présentation (la leçon inaugurale) ne se situa pas cette année-là du côté des programmes et de leur évolution, mais de celui de leurs conceptions sur leur futur métier. Simultanément j'annonçais mon projet de formation sous la forme, entre autres, de l'enrichissement de leurs conceptions...

Ainsi la progression est restée sensiblement la même que les années précédentes (avec un temps un peu plus long sur certains thèmes, se sont ajoutés notamment d'autres exemples d'activités en géométrie), sauf pour la première séance qui est remplacée par deux autres :

- la première, consacrée à un essai d'explicitation des conceptions des étudiants : j'ai distribué et demandé de compléter un questionnaire d'abord individuel et anonyme destiné à connaître leurs idées a priori sur les mathématiques et leur enseignement, idées qu'ils ont été ensuite invités à partager et à discuter par groupes de quatre pour élaborer collectivement de nouvelles réponses[88] ;
- la deuxième séance, consacrée au rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages mathématiques : après une recherche par groupes sur deux problèmes particuliers, l'un ayant plusieurs solutions, l'autre ne leur permettant qu'une résolution approximative (ils ne peuvent avoir la certitude d'avoir trouvé toutes les solutions compte-tenu de leur bagage mathématique), j'ai fait une synthèse sur la notion de problème en insistant sur le rôle fondamental qu'il joue actuellement dans la théorie des apprentissages et j'ai exposé ma conception des mathématiques et de leur enseignement, bien sûr éclairée par les derniers travaux de didactique.

---

[88] je ne rentrerai pas plus dans les détails, c'est l'objet d'un travail en cours de M.L. Peltier.

L'une des dernières séances de l'année fut consacrée à la "Boîte du Pâtissier"[89] qui permit une synthèse sur les concepts de didactique rencontrés au cours des différentes séances de l'année.

F. Année 1991-92

Le groupe de FP1 dont j'ai été chargée cette année-là avait déjà passé au moins un an sur le terrain (sans formation préalable). Les séances duraient trois heures, à raison d'une par semaine.

1. La formation des FP1

a) Description des contenus de FP1

Compte-tenu des classes dont ils avaient été chargés et de leurs demandes de formation, j'ai retenu la progression suivante :

- la mesure des grandeurs, en m'appuyant essentiellement sur la mesure des aires (cf. le démarrage du thème "Aires de surfaces planes"[90] ou le chapitre 3 qui suit) ,
- qui me fournit des exemples de situations de découverte des nombres non entiers, ce qui constitue donc le deuxième thème de ma progression ;
- de la géométrie, qui représentait aussi une forte demande de leur part, essentiellement dans le plan ;
- le nombre entier, pour répondre aux soucis des étudiants ayant enseigné en maternelle et au CP et confrontés à la difficulté des apprentissages numériques ;
- enfin la division euclidienne, qui leur avait elle aussi posé un certain nombre de difficultés dans leurs classes.

b) Analyse des contenus de FP1

Pourquoi avoir négligé les entrées de l'année précédente, même pour le premier thème ?

- Le groupe n'était pas constitué de "débutants", les étudiants avaient tous une connaissance du système scolaire comme acteurs et simultanément avaient pris des "habitudes" d'enseignement, liées aux manuels, aux formateurs, à leur propre personnalité,... Il n'aurait pas été judicieux de les amener, avant la mise en confiance nécessaire, à remettre en cause leurs pratiques antérieures, à douter a posteriori de leur efficacité comme maître. Les deux

[89]Exemple de situation de formation rédigée par ma collègue M.L.Peltier et moi-même et publiée dans COPIRELEM (Cahors 1991) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 1, IREM de Paris 7, p131.

[90]dans COPIRELEM (Pau 1992) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 2, IREM de Bordeaux, pp59-64.

premières séances de l'année précédente ne pouvaient donc être reproduites à ce début de la progression.

- Il s'agissait donc de choisir un thème mathématique sur lequel puissent s'exprimer les diversités de conception des mathématiques et de l'apprentissage, un thème si possible couvrant plusieurs niveaux, puisque ils venaient de niveaux de classe très variés (en gros de la maternelle au CM2) : c'est pourquoi j'ai élu le thème "Grandeurs et Mesure de grandeurs", puisque, sous ses diverses formes, il traverse le CP (longueur), les CE (longueur, masse, durée,...) et les CM (aire et volume,...). Des parallèles peuvent être faits avec le "Nombre entier" (d'où un impact aussi sur la maternelle).

- Enfin je dispose, sur la notion d'aire, d'une suite de situations qui seront présentées dans le chapitre 3 et qui me permettent d'illustrer ma propre conception de l'enseignement, de la justifier et d'avoir des outils pour la comparer à celle transmise par certains manuels.

- De plus, dans les manuels utilisés les plus couramment, la notion d'aire n'est, à mon avis, pas très bien traitée, les auteurs se contentant souvent d'assimiler l'aire à sa mesure.

A part ces changements de début, la progression n'a pas sensiblement varié.

2. La formation des PE1

Simultanément cette année-là nous étions confrontés à la première promotion de futurs professeurs d'école ("transformation" des écoles normales en IUFM), qu'il s'agit de préparer à un concours de recrutement, situé en fin de première année, et simultanément à l'exercice de leur future profession, puisque une seule autre année leur est donnée en cas de réussite au concours pour "acquérir le métier". Le concours étant académique, un programme national n'existant pas (seules sont données les grandes lignes des épreuves), le choix des thèmes à traiter la première année fut fait collégialement avec l'ensemble des formateurs de mathématiques de l'académie. Il se trouve que cet ordre correspondait à mes propositions et aux progressions que j'avais jugées satisfaisantes les années antérieures.

Ces groupes avaient deux plages de mathématiques obligatoires par semaine de deux heures chacune (et cela quinze fois), chaque plage étant prise par un professeur différent (le groupe est donc suivi par deux professeurs) ; de plus, les étudiants qui en avaient fait la demande bénéficiaient d'une séance de deux heures de mise à niveau strictement mathématique.

Je ne regarderai que la partie obligatoire de cet enseignement, la principale difficulté (et différence avec le public antérieur) étant, sur un temps très court (soixante heures) de préparer suffisamment les étudiants à un concours (dont on ne connaissait pas en début d'année le type de sujets), sans perdre pour autant le bénéfice d'une réflexion sur leurs pratiques futures.

a) Description des contenus de PE1

Je n'ai été cette année chargée que d'une partie des enseignements, le premier semestre, et ai donc suivi le plan suivant :

- résolution de problèmes sur deux séances : à travers une mise en situation exploitée didactiquement ; ce qui me permettait de donner un aperçu sur que ce sont aujourd'hui les mathématiques à l'école et de définir la tâche du maître : construire des situations adaptées aux apprentissages qu'il souhaite mettre en place ;
- la division sur six séances, chaque séance étant précédée de calcul mental ;
- de la géométrie plane sur six séances, précédées elles aussi de calcul mental : trois mises en situation sur des activités type école élémentaire (déjà citées antérieurement), une séance de rappels des propriétés géométriques et une analyse de manuels.

Ma collègue a poursuivi sur la multiplication, de la géométrie dans l'espace, et sur les deux opérations addition et soustraction.

b) Analyse des contenus PE1

Pourquoi n'avoir pas changé de progression alors que les contraintes institutionnelles (temps de formation, concours en fin de première année) et le type de public (recrutement avec licence) avaient changé ?

Mon objectif principal restait la formation professionnelle (essentiellement la compréhension des démarches d'enseignement), le fonctionnement que j'avais mis plusieurs années à stabiliser me donnait satisfaction, compte-tenu du type d'évaluation que je pouvais mettre en place. Or le descriptif de l'épreuve de mathématiques du concours correspondait au type de devoir en classe que je faisais faire aux étudiants des promotions précédentes ; la préparation que je menais ne me semblait donc pas inadaptée. D'autre part le nouveau niveau de recrutement ne modifiait pas sensiblement le profil mathématique de nos étudiants, du moins la première année des IUFM, puisque seuls étaient attirés et se présentaient des étudiants essentiellement non scientifiques et souvent "handicapés des mathématiques".

Notons que la réussite au concours des candidats l'ayant préparé au sein de l'IUFM fut satisfaisante et que tous les bilans de fin d'année ont fait apparaître une assez grande satisfaction de la part de formés, tant au niveau du contenu général des séances qu'à celui de l'efficacité présumée pour leur future activité professionnelle[91]. Certains ont même déclaré que cette année avait contribué à transformer leurs idées sur les mathématiques en général, j'obtenais finalement des déclarations du même type que celles des promotions antérieures. Cependant la pression du temps et l'existence du concours a créé cette année-là, à mon avis, une atmosphère moins propice à la réflexion.

---

[91] Notons que des stages sur le terrain leur avaient permis dès cette première année de se faire une idée de leurs tâches de maîtres.

G. Année 1992-93

C'était donc la deuxième année de formation avec un concours à la fin de la première année. La confrontation avec des formateurs d'autres IUFM, l'augmentation du nombre d'étudiants en formation, donc du nombre de formateurs, la présence d'une jeune collègue tout juste émoulue du centre IUFM où elle venait de terminer sa deuxième année de formation de professeur de lycée, le désir de faire des concours blancs communs,... nous a conduit à rigidifier la progression de mathématiques de première année pour éviter des dérives potentielles.

La progression à suivre a donc été déterminée au nombre de séances près sur les thèmes qui devaient être traités dans l'ordre décidé collégialement avec des différences entre Rouen et Evreux[92] dues aux contraintes des emplois du temps (à Rouen deux fois deux heures par semaine, à Evreux une fois trois heures par semaine, la mise à niveau étant facultative et supplémentaire).

1. La progression suivie à Rouen

a) Description

L'ordre adopté fut donc le suivant, du moins pour la partie numérique, qui se traitait indépendamment de la partie géométrique (dans l'autre séance de la semaine) :

- fonctions numériques sur quatre séances, suivies éventuellement de deux séances de mise à niveau facultatives ;
- résolution de problèmes numériques (surtout les aspects méthodologiques) sur deux séances ;
- structures multiplicatives sur cinq séances (principalement la division et les problèmes multiplicatifs), suivies de trois séances de mise à niveau facultatives ;
- rationnels et décimaux sur quatre séances suivies de deux séances de mise à niveau.

La progression sur l'autre série de séances, menées parallèlement aux précédentes était la suivante :

- géométrie des solides sur quatre séances suivies de deux de mise à niveau ;
- géométrie plane sur cinq séances, suivies de deux de mise à niveau ;
- résolution de problèmes géométriques sur deux séances ;
- mesure sur trois séances, suivies de deux de mise à niveau.

[92] Je mentionne ce deuxième centre de l'I.U.F.M. de Rouen car j'y intervenais également cette année-là. Le plan de formation est bien sûr commun aux deux centres, des différences interviennent dans la mise en place.

b) Analyse sur Rouen.

A priori la progression sur la partie numérique me convenait moins que celle de l'année précédente, le premier thème choisi ne me permettant pas d'entrer assez vite "dans le vif de mon sujet" : qu'est-ce que les mathématiques et l'enseignement des mathématiques ?

En effet le thème des fonctions numériques est certes un thème du cycle 3, mais il présente des difficultés telles que bon nombre d'étudiants ne le maîtrisent absolument pas, même comme outil de résolution dans des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle ou de calcul de pourcentage. Le "handicap mathématique" est tel qu'il occulte toute réflexion didactique ; en effet la première intention des étudiants est à juste titre de réapprendre la proportionnalité pour maîtriser les problèmes de CM ; et enfermés dans leur réapprentissage (qui est bien souvent un apprentissage), ils ne peuvent prendre un recul suffisant par rapport à leurs propres prestations. D'autre part peu de compétences sur ce thème sont exigibles à l'école élémentaire, donc ce thème n'apparaît pas comme capital pour le maître de CM ; son caractère nécessaire à l'école n'est donc pas évident.

Cette impression a priori fut renforcée par l'évolution des réactions des étudiants en cours et par leur bilan de fin d'année : la satisfaction éprouvée par les étudiants fut moindre que les autres années pour la partie numérique, beaucoup ayant jugé le démarrage sur les fonctions numériques trop difficile et trop mathématique.

Par contre la progression suivie sur la partie géométrique plût davantage et un certain nombre d'étudiants ont déclaré être en partie réconciliés avec cette branche des mathématiques qui leur avait toujours paru très rébarbative et avoir des idées sur des activités et des conclusions géométriques possibles à l'école.

On peut penser que par un effet placebo, puisque je me sentais mal à l'aise dans cet ordre qui m'était imposé, il était prévisible que ni mes étudiants, ni moi ne seraient pas satisfaits des effets de ma formation. Ceci se produisit effectivement, mais les autres formateurs du centre ressentirent aussi des difficultés à tirer la partie numérique dans la direction qu'ils avaient choisie au départ : aussi nous conclûmes unanimement à "l'impertinence" des fonctions numériques comme premier thème. En conséquence nous décidâmes pour l'année suivante de changer de découpage (dans les parties dites "numérique" et "géométrique") et de progression.

2. La progression à Evreux

a) Description de la progression suivie à Evreux

Un seul professeur s'est occupé d'un groupe d'étudiants tout au long de l'année. Le découpage suivant a été adopté, sur des séances de trois heures.

- Multiplication et division dans N et dans D ; uniquement usage des techniques sur quatre séances.
- Fonctions numériques et proportionnalité sur trois séances.
- Géométrie plane et de l'espace sur cinq séances.
- Une séance sur la résolution de problèmes.
- La mesure sur deux séances.
- Les rationnels et les décimaux sur trois séances.

Personnellement j'ai toujours fait débuté mes séances par du calcul mental (déjà décrit précédemment) et le premier thème abordé fut la division (avec la dernière progression décrite) sur trois séances, ne gardant qu'une séance sur la multiplication.

b) Analyse sur Evreux

Le lecteur se sera douté que cette progression me convenait bien davantage.

J'ai ressenti une plus grande satisfaction à Evreux qu'à Rouen, les étudiants d'Evreux m'ont semblé avoir mieux saisi ce qu'étaient les mathématiques à l'école et j'ai pu apprécié, au cours de l'année, des "réactions didactiques" lors d'études critiques de manuels ou d'analyse de séquences qui correspondaient plus à mes attentes dans mes deux groupes d'Evreux que dans mes groupes de Rouen. Bien entendu, tous ces constats demanderaient à être objectivés pour acquérir une valeur probatoire, mais tel n'était pas notre objectif ici.

H. Conclusion sur mon ordre

1. Analyse globale

Entre 1986 et 1991, ni les contraintes institutionnelles, ni le public des formés n'ont beaucoup changé : toujours une formation initiale en deux ans, le même programme de référence, à peu près la même structure de groupes ou d'emploi du temps, le même type d'étudiants à dominante plutôt littéraire, mal à l'aise vis à vis des mathématiques.

Pourtant on note une évolution dans les différentes progressions que j'ai menées :
- les premières années, je suivais un ordre à peu près conforme à la construction des notions mathématiques et au déroulement chronologique des programmes (les notions de classement, rangement avant l'étude du nombre entier, elle-même avant celle des opérations, etc.) ;
- puis on observe dans mes progressions une évolution vers une certaine stabilité, avec des thèmes qui reviennent toujours en première année (plus du tout ceux des débuts), la division, la géométrie, éventuellement la mesure (quand les étudiants avaient déjà une expérience du

terrain), puis le nombre entier ; cet ordre n'a été bouleversé que la présence du concours et une décision collégiale de l'équipe de mathématiques du centre de formation.

Mes objectifs de formation sont également restés les mêmes sur ces différentes années[93], j'ai donc progressivement atteint un indice de satisfaction supportable en gardant cet ordre. Je l'ai perdu en le bouleversant.

2. La séance inaugurale

Chaque enseignant connaît l'importance que peut avoir la séance de contact avec un nouveau public et la réflexion préalable que sa préparation occasionne. Examinons donc l'évolution de la toute première séance : d'abord consacrée aux programmes, elle replaçait les savoirs à enseigner à l'école dans leur cadre de référence ; s'intéressant aux conceptions déclarées des étudiants, elle permettait de situer le cadre de référence des théories de l'apprentissage actuelles ; dévolue à la résolution de problèmes, elle prenait les étudiants comme sujets d'étude pour redéfinir "l'activité mathématique" et les démarches de recherche préconisées pour l'école. Il peut être possible d'analyser cette évolution en termes d'essais variés de prise en compte des relations Maître-Savoir et Elève-Savoir, alors que la toute première introduction se limitait davantage une étude du Savoir (ou et même des savoirs à enseigner).

3. Le choix et l'ordre des thèmes de première année

Le choix des thèmes et l'ordre dans lequel je les traite ne définissent bien sûr pas à eux seuls la progression que je peux suivre. Certes j'ai modifié au fil des années le choix des thèmes que je traitais en première année (j'en ai choisi certains qui me paraissaient plus adaptés globalement au "moment" de la formation, c'est-à-dire au degré de connaissance supposé de mes étudiants sur l'enseignement à l'école), mais j'ai aussi modifié la façon dont je traitais certains thèmes. Une analyse en termes de liaison stratégies possibles-savoirs mathématiques semblerait donc possible.

D'autre part les échanges avec les autres formateurs, les réflexions conjointes lors de rencontres nationales, la communication de derniers résultats de recherche ou des préparations personnelles peuvent infléchir le mode de traitement d'un thème. Par exemple l'année 1987 a vu paraître des résultats des travaux INRP[94] sur les apprentissages numériques des cinq-huit ans (et une bande-vidéo illustrant certains de ces résultats) et ceci a modifié dès 1988 le type de cours que je faisais sur le nombre entier et sa place dans la formation de mes étudiants. De

93 qu'ils adhèrent au projet de transformation de leurs pratiques d'enseignement via un enrichissement de leurs conceptions des mathématiques et de leur enseignement et de leur culture mathématique, afin d'enseigner à tous les niveaux de l'école.

94 Stage national pour les formateurs d'instituteurs, organisé par l'équipe de l'INRP travaillant sur le nombre et publication d'un Dossier sur le nombre dans le *Journal des Instituteurs* de juin 1987 (Ed.Nathan).

même la publication sur le même thème par la même équipe des *Apprentissages numériques en grande section de maternelle* (janvier 1990) a eu une incidence non négligeable sur la façon dont je traitais le sujet, plus que les publications postérieures qui se situaient dans la même lignée (*Apprentissages numériques au C.P.* -mars 1991-, puis *au CE1* -juin 1993-).

Dans le même ordre d'idées, la communication de la progression sur la division d'H.Péault lors du Colloque de Rouen en mai 1988 transforma ma progression et accrut la satisfaction que je ressentais de son impact sur les étudiants.[95]

La documentation disponible, les communications orales ont donc aussi eu une influence sur les transformations de mes choix. Il y a donc sans doute lieu de s'intéresser aux écrits disponibles pour définir des critères de choix d'une formation.

4. Comparaison avec les autres formateurs

J'ai montré que j'avais au fil des années atteint un certain confort de formation (me permettant d'atteindre un équilibre entre efficacité supposée et gestion des cours et du groupe d'étudiants) autour d'un ordre de présentation de notions mathématiques relativement stable.

Ce constat sur ma pratique personnelle me fait poser une question.

Existerait-il, dans les pratiques des formateurs des constantes d'ordre ?

De quelle nature ?

Cette question en entraîne naturellement une autre.

Les formateurs sont-ils sensibles à l'impact de l'ordre de présentation des notions dans leurs pratiques de formation ?

Dans la partie qui suit, nous[96] allons donc essayer de donner des éléments de réponse à ces questions et d'étudier les relations entre les stratégies et les savoirs mathématiques que peut établir le formateur, compte -tenu de l'état des connaissances publiques sur ces savoirs et leur enseignement.

---

[95] Remarquons que les apports des publications sont de deux natures différentes. Pour le nombre entier, les publications de l'I.N.R.P. donnaient des résultats de recherche en rupture avec les habitudes d'enseignement antérieures, résultats dont il fallait informer les étudiants ; ces nouvelles informations m'ont cependant amenée à transformer intégralement mon cours sur le nombre. Pour la division, H.Péault proposait une progression qui paraissait intéressante pour la formation, sans que les conclusions pour l'école soient modifiées.

[96] Nous passons au pronom **nous** à la place du **je** pour pointer la différence entre la réflexion de l'enseignant sur sa pratique et celle du chercheur, à la recherche de régularités parmi les pratiques en général.

II. Autres pratiques

Les formateurs de maîtres du premier degré choisissent certains contenus de formation pour la première année, gardant les autres pour la seconde. Notre hypothèse est la suivante : malgré l'absence de programmes nationaux (du moins en ce qui concerne les nouvelles formations de professeurs d'école), on peut constater un certain nombre de constantes dans ces choix.

Ces choix ont sans doute d'ailleurs hérité des formations dispensées antérieurement dans les écoles normales.

Nous avons donc constitué un questionnaire pour tester cette hypothèse.

A. La constitution du questionnaire.

Pour interroger les formateurs sur leurs pratiques, nous avons utilisé la description des contenus de formation définie dans l'introduction générale, sous forme de ce que nous avons appelés les thèmes de la formation ; les intitulés ne font apparaître aucun contenu didactique, ni pédagogique, pour éviter d'éventuelles polémiques ne serait ce que sur le vocabulaire employé. Bien entendu chacun est libre d'y mettre le contenu didactique de son choix comme il est d'usage dans une formation professionnelle, l'objectif étant de rendre les formés capables d'enseigner les thèmes mathématiques cités. Ce sont donc les thèmes suivants :

A Nombre entier	**F** Rationnels et décimaux	**J** Géométrie plane des figures
B Addition	**G** Opérations sur décimaux	**K** Géométrie plane des transformations
C Soustraction	**H** Fonctions numériques	**L** Géométrie des solides
D Multiplication	**I** Mathématiques et maternelle	**M** Mesure
E Division		

1. Etude des questions.

Le questionnaire dans son ensemble figure à l'annexe K, page 307 ; examinons chacune des questions.

L'hypothèse de travail mentionnée

> **Hypothèse de travail** : vous devez dispenser une formation initiale d'une soixantaine d'heures du module obligatoire de formation initiale de futurs professeurs d'école en mathématiques ; le programme du concours est déterminé en fonction de votre programme de cours.

devait mettre les formateurs dans une situation fictive égalitaire. En effet les temps de formation actuellement alloués aux candidats au concours de professeur d'école varient dans chaque académie, nous souhaitions placer tous les interviewés dans les mêmes conditions (faisant l'hypothèse que le temps de formation imparti a un impact non négligeable sur les choix effectués par le formateur). Cette remarque est aussi valable pour le programme du concours qui n'est pas toujours déterminé par les formateurs responsables de la préparation des futurs candidats.

1 - Quels sont les thèmes mathématiques dans la liste suivante que vous choisissez de traiter en priorité si vous avez 60 heures de formation à dispenser ?		
A Nombre entier	**F** Rationnels et décimaux	**J** Géométrie plane des figures
B Addition	**G** Opérations sur décimaux	**K**Géométrie plane des transformations
C Soustraction	**H** Fonctions numériques	**L** Géométrie des solides
D Multiplication	**I** Mathématiques et maternelle	**M** Mesure
E Division		

Cette première question devait nous permettre de dégager les thèmes mathématiques jugés incontournables dans la formation des futurs instituteurs, sachant bien entendu que nous avions choisi un découpage que tous ne reconnaîtraient pas comme susceptible de décrire leurs thèmes de formation, certains adoptant des entrées plus méthodologiques comme "Résolution de problèmes" ou résolument pédagogiques comme "Comment organiser une séquence". Toutefois nous ne nous intéresserons qu'aux séquences qui s'appuient sur des notions mathématiques bien définies.

2 - Votre choix serait-il différent pour une première année de formation non sanctionnée par un concours ? Pourquoi ?

La question 2, faisant intervenir le concours actuel, tentait de prouver l'influence d'une évaluation de type sommatif sur les décisions du formateur non seulement sur le mode de traitement des thèmes, mais aussi sur le choix des thèmes à traiter et notamment de voir s'il existe dans les représentations des formateurs des thèmes plus facilement *évaluables* (par une épreuve écrite comportant une partie mathématique et une partie didactique) que d'autres.

3 - Avez-vous un ordre de présentation privilégié ? Si oui lequel, pourquoi ? Si l'ordre vous est indifférent, précisez-le, merci.

La question 3 renforce la question 1. Après avoir choisi quels thèmes il traite la première année (ce qui représente un premier ordre sur deux groupes de thèmes), le formateur peut encore décider dans quel ordre il les aborde et en fonction de quoi.

4 - Quels critères retenez-vous pour juger de l'effet de votre formation ?

La question 4 tente de cerner ce que le formateur attend à court terme de l'étudiant qu'il a formé et, indirectement, essaie de préciser l'influence du concours sur la formation dispensée, en mettant en évidence le changement de critères d'évaluation.

Enfin la question 5

5 - Quels thèmes de la liste acceptez-vous de ne pas traiter dans une formation initiale (suite aux contraintes de temps...) ? Pourquoi ?

essaie de préciser les critères de choix du formateur par l'examen des thèmes qu'il accepte de ne pas traiter et les raisons qu'il donne à ces décisions.

2. La passation du questionnaire.

Ce questionnaire a été présenté et distribué à une centaine de formateurs lors du premier jour du Colloque national annuel de la C.O.P.I.R.E.L.E.M. (Aussois, mai 1993), regroupant des formateurs de mathématiques du premier degré. Quarante-trois ont été remplis et analysés.

B. Le dépouillement et l'analyse

1. Remarques faites par les formateurs

1 - Le découpage en thèmes proposés a souvent été remanié par les formateurs pour pouvoir répondre plus aisément aux questions.

Voici des exemples de regroupements effectués pour répondre aux questions[97]:

D et E	B et C	A,B,C,D,E	A,Bet C	M et F	F et G	J et K	J,K,L et M	J et L
8	6	4	1	1	3	2	3	3

Le découpage en champs notionnels ou en "familles", comme le cite l'un d'entre eux, paraît plus adapté pour 16 formateurs sur 42.

Nous retrouvons des regroupements classiques (D et E comme B et C, les couples d'opérations inverses ; A, B, C, D: les quatre opérations de l'école ; A, B et C, les trois "vraies" opérations au sens mathématique ; F et G, les décimaux et les opérations associées ; la géométrie regroupée avec éventuellement la mesure : J et K, J et L, J, K, L et M) et un regroupement moins usuel (M et F mesure et non entiers).

2 - Certains auraient préféré un autre type d'entrées, moins centrées sur le notionnel (1 fois) ou introduisent à titre d'exemple, souvent comme leçon inaugurative, une entrée supplémentaire qualifiée de "hors thème mathématique",: *Résolution de problèmes* (4 fois) et ce afin de réfléchir sur la notion d'activité mathématique.

---

[97]Rappel:

A Nombre entier
B Addition
C Soustraction
D Multiplication
E Division
F Rationnels et décimaux
G Opérations sur décimaux
H Fonctions numériques
I Mathématiques et maternelle
J Géométrie plane des figures
K Géométrie plane des transformations
L Géométrie des solides
M Mesure

3 - Cinq formateurs déclarent alterner tout au long de l'année le *numérique* et le *géométrique*, ce qui ne leur permet pas de donner un rang fixe au *géométrique.*

2. Les thèmes les plus cités

Voyons maintenant les thèmes les plus évoqués (E) et ceux qu'on accepte de ne pas traiter (PT).

	entier	addit	soust	multi	divisi	deci	opde	fcts	mater	plan	trans	espa	mesu
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
(E)	34	17	16	27	34	31	10	35	6	38	10	20	14
(PT)	1	9	6	6	1	4	7	1	7	1	13	4	10

Les thèmes les plus évoqués sont donc, dans l'ordre décroissant :
- *la géométrie plane des figures,* 38 fois
- *les fonctions numériques,* 35 fois
- *le nombre entier* et *la division,* 34 fois
- *les rationnels-décimaux,* 31 fois
- *la multiplication,* 27 fois

suivis assez loin derrière par :
- *la géométrie des solides,* 20 fois
- *l'addition* et *la soustraction* 17 et 16 fois
- *la mesure,* 14 fois
- *les opérations sur les décimaux* 10 fois

et *les transformations.*

Pour éclairer cette vision numérique par thèmes, précisons le nombre de thèmes effectivement choisis et notés par chaque personne questionnée :
- pour deux formateurs, trois thèmes : les séries H, E, F et D, H, J;
- pour quatre formateurs, quatre thèmes : les séries D, J, H, M / D, E, F, J / E, F, H, J / E, F, L, A;
- pour cinq formateurs, cinq thèmes : les séries A, D, E, H, J / H, F, J, A, K / F, G, H, E, J / D, E, F, G, H / J, L, A, E, F ;
- pour les autres formateurs, au moins six thèmes (sept formateurs en citent neuf et plus).

La grande majorité de formateurs traite donc des cinq premiers thèmes mentionnés ci-dessus, en présence d'un concours de fin d'année (il serait d'ailleurs intéressant de croiser ce constat avec l'étude des thèmes de sujets de concours dans les diverses académies). Bien sûr rien ne nous permet de dire que ces thèmes sont envisagés de façon identique et exhaustive (sans penser y revenir l'année d'après), mais on peut tout de même dégager de ce questionnaire une constante de choix.

Nous verrons un peu plus loin que pour beaucoup, ce choix est dépendant de la présence du concours.

3. Les thèmes moins traités

Les thèmes (qu'à grand regret) les formateurs acceptent de laisser de côté sont d'abord l*es transformations* (cité 13 fois), puis *la mesure* (cité 10 fois), suivi par *l'addition* (cité 9 fois), *les opérations sur les décimaux* et *la maternelle* (cité 7 fois) enfin *la soustraction* et *la multiplication* (cité 6 fois).

Il est plus intéressant, nous semble-t-il, d'examiner en détail les différentes raisons du choix des thèmes laissés plus volontairement de côté. Voyons les raisons et les thèmes cités.

Notons que 7 formateurs refusent de laisser un quelconque thème de côté, certains préférant le traiter même très succinctement et renvoyer à des travaux pédagogiques sur le sujet.

Nous avons opéré sur les raisons fournies par les formateurs un classement en trois groupes :
- les raisons qui nous semblent plus liées à la spécificité (ou au "caractère général") des savoirs ;
- celles qui nous paraissent liées au regard qu'a l'école (via les programmes, les habitudes des instituteurs,...) sur le thème ;
- celles liées au formateur et au fonctionnement de sa propre institution.

a) Raisons liées au thème sous ses aspects mathématiques et didactiques

- Ce sont des thèmes difficiles à aborder[98] - sur un temps court : (F,G) et (G),
  - avec un certain public : (M).
- L'une des notions étudiées permet un transfert vers une autre :
  - de la numération vers (B,C,D,E),

---

[98] Rappel :

A Nombre entier	**F** Rationnels et décimaux	**J** Géométrie plane des figures
B Addition	**G** Opérations sur décimaux	**K** Géométrie plane des transformations
C Soustraction	**H** Fonctions numériques	**L** Géométrie des solides
D Multiplication	**I** Mathématiques et maternelle	**M** Mesure
E Division		

- d'une opération vers d'autres :
    - de (B,D) vers (C,E) ;
    - un aperçu de D ou de (B,C,D) sera vu si on traite E.
- La notion est englobée dans un domaine plus grand : (F,M) dans H.

b) Raisons liées au terrain

- La pression de l'institution est moins forte sur ces thèmes : (J,K,L) (K,M,G,B) ;
- Le thème est à la limite du programme de l'école (K) 5 fois ou marginalisé dans l'enseignement (K,L) ;
- *et sa version contraire* : ces thèmes sont importants pour l'école, les étudiants iront voir seuls dans les livres : (B,D,H) (B) (M) (B,G,M) (B,C,D,E) 2 fois ;
- ou encore il n'est pas trop mal traité dans les manuels : (K) (D) ;

c) Raisons liées au formateur ou à la formation institutionnelle

En particulier pour (I) : - le formateur ne se sent pas compétent sur ce thème : 2 fois ;
- il existe un module spécial réservé à la maternelle ;
- la formation est renvoyée au terrain (instituteurs maîtres formateurs, stages en maternelle) :

Les deux derniers motifs sont mentionnés 4 fois.

Un formateur n'a pas trouvé de "contenu de formation cohérent" pour (F,G) et il renvoie aux manuels (?).

d) Notre analyse de ces raisons

Cette analyse est déjà amorcée par le classement que nous proposons ci-dessus. Il nous semble donc que le formateur, dans ses décisions de traiter tel ou tel thème, tient compte de plusieurs éléments, qu'il observe de son point de vue :

- des éléments liés au savoir :
    * la difficulté que représente l'acquisition de ce savoir pour son public, sur le temps de formation fixé ;
    * la structuration des différents savoirs entre eux qui peut lui permettre d'économiser du temps de formation, en faisant l'hypothèse de transfert de la formation d'un savoir vers l'autre ;
- le regard de l'école, futur milieu professionnel du formé, sur ce même savoir : place dans les programmes, place dans les habitudes, attentes de la noosphère, modes de traitement des manuels ;

- et bien entendu sa propre compétence, compte tenu des publications qu'il connaît[99], de sa culture mathématique (en général plus sûre) et didactique.

Etudions maintenant les décisions du formateur concernant l'ordre de présentation des notions, qui n'est qu'un prolongement du choix de ce qu'il a décidé d'étudier la première année.

4. L'ordre de présentation des notions.

Beaucoup de formateurs ont un ordre bien précis (tous sauf 7). Sans que celui-ci soit exactement le même pour tous les formateurs d'un groupe, on peut cependant distinguer trois grands groupes, en nous fondant essentiellement sur les premiers thèmes retenus :

a - ceux qui jugent indispensable de commencer par *la numération* (20 personnes) souvent groupée avec le thème de *la maternelle*, suivis de façon variable ou par *les opérations* (une ou plusieurs) ou par *les non entiers* et *les fonctions numériques* ;

b - ceux qui ne commencent pas par *le nombre entier* (13 personnes) mais alors choisissent souvent *la multiplication* et/ou *la division* (5 personnes) ou de *la géométrie plane* (5 personnes) ;

c - ceux qui ne donnent pas d'ordre par thème mais déclarent alterner le numérique et le géométrique (3 personnes).

10 personnes du groupe **a** suivent une progression dans l'ordre donné par les lettres de l'alphabet codant les différents thèmes[100], au moins pour les cinq premiers thèmes (*nombre entier*, puis les quatre opérations de l'école), la *géométrie plane* pouvant s'intercaler dans cette suite. *La géométrie plane* joue d'ailleurs ce rôle d'intercalaire pour un grand nombre de formateurs ; elle n'a pas nécessairement de place fixe ; cela signifie aussi qu'elle peut être traitée par morceaux, ce qui semble plus rare pour d'autres thèmes (on ne parle d'eux qu'une fois dans l'année).

Les raisons données pour éclairer le choix de l'ordre sont les suivantes :

- respecter la construction des notions mathématiques et l'ordre d'enseignement des notions à l'école, pour le groupe **a** ;

---

[99]On peut d'ailleurs s'étonner que le plus grand domaine d'incompétence des formateurs soit les mathématiques de l'école maternelle, alors qu'un certain nombre de publications ont vu le jour depuis quelques années. Sans doute cela vient-il de la pluridisciplinarité obligatoire de ce niveau qui rend la situation du spécialiste de mathématiques plus inconfortable.

[100] Rappel :

A Nombre entier	**F** Rationnels et décimaux	**J** Géométrie plane des figures
B Addition	**G** Opérations sur décimaux	**K** Géométrie plane des transformations
C Soustraction	**H** Fonctions numériques	**L** Géométrie des solides
D Multiplication	**I** Mathématiques et maternelle	**M** Mesure
E Division		

- offrir une nouvelle entrée (notamment didactique) pour une notion déjà maîtrisée au niveau mathématique, ou illustrer une nouvelle approche des mathématiques pour la partie géométrique (résolution de problèmes en géométrie) pour le groupe **b** ;
- aucune raison n'est explicitée pour le groupe **c**.

5. L'incidence du concours sur les choix mentionnés

a) Description des résultats et des raisons

9 formateurs déclarent que leur choix ne serait pas différent s'il n'y avait pas le concours, dans la mesure où il leur était indiqué qu'ils pouvaient maîtriser le programme du concours (ce sont eux qui le signalent).
7 ne donnent aucune réponse à cette question.
26 modifieraient leur choix s'il n'y avait pas le concours.

Sont évoquées comme raisons des choix s'il y a le concours :
- la nécessité de mettre au concours des thèmes "évaluables", du type *fonctions numériques* ou *décimaux.* Là on constate que le choix de ces thèmes évaluables concerne les notions ressenties en général comme les plus difficiles par les étudiants, celles sur lesquelles ils ont encore de la mathématique à apprendre (7 fois) ou bien celles sur lesquelles il y a "plein de didactique" ;
- le souhait de traiter des notions "pas trop loin" du type de connaissances des étudiants, donc plutôt des notions du cycle 3 (CE2 , CM1, CM2). Cette raison renforce encore le choix des *fonctions numériques* et des *non entiers.*

Par contre, en l'absence d'un concours, les modifications à effectuer seraient les suivantes :
- choisir des entrées plus didactiques (4 fois) ou pédagogiques (par exemple "par cycles", 2 fois),
- choisir une progression en harmonie avec les stages sur le terrain (4 fois) : par exemple parler du *nombre* et de *la maternelle* avant un stage dans les petits niveaux,
- suivre l'ordre des programmes des mathématiques de l'école élémentaire (6 fois) et traiter de la maternelle (4 sur ces 6) ; par exemple suivre une progression du type *nombre entier* et *maternelle*, *addition* et *soustraction*, *multiplication* et *division*, etc.,
- envisager des regroupements de thèmes (2 fois),
- choisir plus de géométrie (2 fois),
- déterminer l'ordre des thèmes en fonction des stratégies de formation (1 fois).

b) Notre analyse de ces raisons

Etonnamment, alors que le concours donne une reconnaissance institutionnelle à la partie professionnelle d'un concours d'enseignant, il semble être ressenti par beaucoup de formateurs comme un handicap à la formation professionnelle, sa préparation semblant éloigner des réalités de la classe (cf. les trois premières raisons évoquées).

Comment une objectivation a priori de l'évaluation peut-elle perturber la formation professionnelle ?

Ceci nous conduit à examiner la question 4.

4 - Quels critères retenez-vous pour juger de l'effet de votre formation?

6. Les critères d'impact de la formation

Considérons les différents types de réponses à la question 4.

Comme dans les questions précédentes, plusieurs réponses ont pu être prises en compte pour le même formateur. Pour une meilleure lisibilité, nous avons regroupé les réponses en six groupes, selon le type de critère qu'elles invoquent et nous avons fait figurer, à côté de chaque critère, le nombre de formateurs ayant donné cette réponse.

Apparaissent donc les types suivants.

- Pour les critères liés aux **relations entre étudiants et formateur**, les expressions citées pour juger de l'effet de la formation sont :

  * l'assiduité : 3 fois,
  * l'intérêt, la participation, le plaisir des étudiants, l'atmosphère de groupe : 6 fois,
  * les points de vue déclarés ou les attitudes constatées des étudiants: (rapport aux math, attitude face aux problèmes..) : 7 fois,
  * des demandes de compléments en fin d'année : 1 fois,
  * la capacité d'argumenter au cours des débats : 3 fois.

- Pour les critères liés aux **attitudes professionnelles** (certes fictives puisque où les formés ne travaillent pas avec leurs propres élèves), ont été mentionnés :

  * la capacité d'analyser ce qui se passe dans une classe : 1 fois,
  * la capacité d'imaginer des situations sur un thème donné (avec documentation) :2 fois,
  * la réalisation de séquences de classes et l'analyse de ces séquences : 2 fois,
  * la préparation écrite de séquences : 5 fois,
  * l'analyse de séquences et/ou de travaux d'élèves : 9 fois,
  * le réinvestissement didactique en deuxième année : 1 fois.

Remarque mentionnée une fois : "les réponses en cours, les travaux ne reflètent pas les comportements en situation.", qui montre la conscience du type d'évaluation "in vitro".

- Un des critères d'évaluation mentionnés sont les **devoirs**, type concours, avec leurs aspects mathématiques et didactiques : 16 fois.

- Pour les critères liés à un **enseignement effectif**, ont été cités :
  * les visites sur le terrain : 10 fois (dont 5 pendant le stage en responsabilité),
  * les "échos" quelques années après : 2 fois.

- **Autres réponses** rencontrées :
  * "je suis démuni(e)" : 2 fois,
  * non réponses : 4 fois.

Notons que seulement 16 formateurs, sur 37 ayant exprimé une réponse, utilisent la réussite au concours ou aux devoirs type concours comme critère. Modérons cette remarque par le fait que la réponse "concours" semblait peut-être évidente aux personnes questionnées (et jugée inintéressante pour l'enquêteur). Toujours est-il que la formation est appréciée par le formateur avec d'autres critères que le devoir écrit, ces critères étant malheureusement assez difficiles à objectiver.

Remarquons aussi que les aspects strictement mathématiques des savoirs ne sont jamais mentionnés pour eux-mêmes comme critères d'évaluation, en dehors de la partie mathématique des devoirs type concours.

C. Conclusion

1. Sur la constitution du questionnaire

Les entrées proposées dans le questionnaire ne semblent pas tout à fait satisfaire l'ensemble des formateurs, dans la mesure où elles occultent la parties didactique et professionnelle et proposent un découpage parfois trop fin des diverses notions, ne permettant pas une restructuration efficace des connaissances. Cependant la majorité a accepté de "jouer le jeu" et nous pouvons dégager une certaine constance dans les thèmes les plus souvent traités en première année :

- *géométrie plane*
- *fonctions numériques*
- *nombre entier* et *division*
- *rationnels et décimaux.*

2. Sur les intentions des formateurs

Ces décisions traduisent des objectifs de formation, implicites ou explicites, mais il est plus difficile de cerner les raisons pour lesquelles ces thèmes sont choisis, compte-tenu de la construction du questionnaire. Il semblerait cependant qu'on puisse croiser les intentions suivantes, exprimées par un certain nombre de formateurs.

- Etudier des thèmes sur lesquels il existe une évaluation mathématique et didactique possible, ce qui peut justifier la présence de thèmes "consistants mathématiquement" (*non-entiers* et *fonctions numériques*), plutôt du cycle 3, sur lesquels on dispose d'analyses et de travaux didactiques ; ce choix semble d'ailleurs assez en relation avec la présence d'un concours triant les candidats sur l'expression écrite de compétences mathématiques et didactiques.

Effectivement, d'après notre expérience, ces deux thèmes sont souvent les plus mal connus des étudiants ; ils peuvent donc permettre de trier les candidats sur leurs prestations mathématiques. D'autre part la complexité de leur apprentissage permet des réflexions didactiques variées qui se sont particulièrement enrichies ces dernières années.

- Transmettre assez vite un nouveau regard sur les mathématiques et leur enseignement, dans la problématique de formation des ex-écoles normales ; d'où la nécessité de présenter sur des thèmes reconnus des approches "nouvelles", ce qui explique la présence de *la division* et de *la géométrie*.
- Aborder l*e nombre entier,* notion fédératrice de toutes les autres, pour réamorcer une étude systématique de la construction du nombre et de la numération et simultanément aborder les compétences et capacités des tout jeunes enfants.

Ce choix reste dépendant du concours, puisque beaucoup de formateurs nous proposent une autre progression en cas d'absence de celui-ci, donnant comme raison principale de ce changement qu'ils n'ont plus à tenir compte du caractère "évaluable" ou non des thèmes ; ils peuvent donc "se rapprocher de l'école", en choisissant des entrées plus pédagogiques ou didactiques ou en respectant une chronologie qui serait celle des programmes de l'école.

Compte-tenu de cette étude, il nous paraît donc possible d'affirmer qu'il existe des constantes dans le choix de l'ordre des thèmes choisis par le formateur, constantes que l'on a dégagées ci-dessus. Par contre il ne semble pas exister d'ordre idéalement partagé, puisque l'on oscille entre trois priorités, rappelées précisément ci-dessus.

3. Vers le chapitre suivant.

Pourquoi donc ces constantes alors qu'aucun ouvrage de référence ne donne une direction de travail dans ce sens ?

D'autre part, les contraintes et les objectifs de formation étant globalement les mêmes pour tous les formateurs (rendre ses étudiants capables d'assurer un enseignement de mathématiques dans un cadre constructiviste), pourquoi donc ne trouve-t-on pas une plus grande unité de choix chez les formateurs interrogés ?

a) Eléments de réponse sur la diversité (ce qui était prévisible).

- Aucun ordre n'est imposé par l'institution, ni même par une pseudo-chronologie des apprentissages, puisqu'a priori tous les savoirs disciplinaires rencontrés ont déjà été appris par les étudiants. Tout au plus pourrait-on rechercher un ordre cohérent de REapprentissage! Quant aux savoirs pédagogiques et didactiques, personne ne s'est encore lancé dans une proposition de progression les organisant. De plus le questionnaire étant formulé en "thèmes mathématiques" et non "didactiques", cet aspect ne pouvait directement être pris en compte.

- L'expérience (comptée en temps de formation) peut jouer un rôle non négligeable dans les choix du formateur : en effet la tendance connue et reconnue (et que nous avons nous-mêmes manifestée dans nos premières années de formation) est d'enseigner ses étudiants en suivant le programme de l'école élémentaire, qui se présente comme une progression naturelle en formation. On peut donc penser que certains blocs de "constance" du questionnaire sont créés par les formateurs ayant le même type d'ancienneté dans la formation des maîtres du premier degré.

Malheureusement nous n'avons pas pensé a priori à prendre cet élément en compte dans notre questionnaire, les questionnaires remplis mêlent donc formateurs débutants[101] et formateurs plus expérimentés, dont nous ne pouvons départager les réponses.

- Si l'on occulte la facilité d'une évaluation par devoir écrit comme raison de choix des thèmes, une autre interprétation de la diversité (les deux derniers tirets de la conclusion sur les groupes de formateurs) pourrait venir des conceptions que se font les formateurs de la formation des adultes. L'étude des réponses au questionnaire fait en effet apparaître deux "ordres" :

- un ordre, dont on peut dire qu'il respecte une chronologie des notions par imitation de la chronologie fixée par les programmes des différentes classes de l'école ; le formateur

101 Il faudrait encore distinguer collègues débutants seuls dans la formation ou entrant dans une équipe qui contribue à la formation du nouveau par une sorte de tutorat, ce qui leur fait acquérir immédiatement une connaissance

choisissant cet ordre semble accorder une importance à une certaine continuité des apprentissages ;

- un ordre qui semble s'appuyer au contraire sur des ruptures (d'abord la division -dont on verra plus tard que c'est un thème bien spécifique- ou de la géométrie), ruptures par rapport à un certain enseignement traditionnel.

Le deuxième ordre chercherait davantage à déstabiliser l'étudiant, dans la mesure où il peut bousculer ses quelques repères dans les mathématiques, le premier au contraire vise à conforter l'ordre "naturel" que l'étudiant peut imaginer.

b) Eléments de réponse sur les constantes

C'est le sujet de la suite de notre étude.

Il semblerait donc, qu'à travers quelques thèmes (ou quelques blocs de thèmes), le formateur pense atteindre plus rapidement atteindre les buts de formation qu'il s'est fixés, ces buts étant moins thématiques que didactiques. Or le nom du thème ne suffit apparemment pas à définir le type de formation. Certains formateurs le mentionnent dans leurs réponses et, comme l'a déjà expliqué A.Kuzniak, le formateur a également, qu'il l'explicite ou non, le choix d'une stratégie pour la mise en place effective de la formation. Le questionnaire ne pouvait prendre explicitement en compte cet aspect sur les stratégies, dans la mesure où il s'agit de travaux récents, mais nous pouvons déjà étudier si certains thèmes mentionnés peuvent relever effectivement de différentes stratégies, faisant l'hypothèse que c'est peut-être la possibilité (ou non) de ces associations qui fait choisir au formateur tel ou tel thème en priorité. Ou encore, par une autre façon de voir les choses, le formateur choisit une stratégie qu'il juge plus opportune pour le public dont il est chargé, puis détermine le contenu mathématique qui s'adapte le mieux à cette stratégie....

En résumé, peut-on croiser indifféremment n'importe quel thème avec n'importe quelle stratégie déterminée par A.Kuzniak, existe-t-il des thèmes spécifiques en liaison à des stratégies spécifiques, c'est ce sur quoi nous allons nous interroger dans le chapitre suivant.

Les pratiques sur les savoirs

Dans ce chapitre, il s'agit de vérifier s'il existe des relations privilégiées entre les thèmes et stratégies (que nous avons définis dans l'introduction générale). Nous n'allons pas nous livrer à une étude exhaustive de tous les thèmes mathématiques, mais en choisir certains qui nous paraissent relativement différents et exemplaires : **la division** et **la proportionnalité**, thèmes souvent mentionnés par les formateurs interrogés, sur lesquels nous examinerons les pratiques de formation, et **la mesure**, thème plus délaissé apparemment par les formateurs en première année, sur lequel nous présenterons notre progression.

Nous n'avons délibérément pas choisi la géométrie, bien que ce thème arrive en tête de ceux mentionnés dans le questionnaire des formateurs, car les résultats didactiques publiés demeurent, à notre avis, encore trop faibles sur ce thème : nous ne pourrions renvoyer le lecteur à aucun travail écrit.

I. Principes de l'étude

A. Pourquoi choisir ces trois thèmes, division, proportionnalité et mesure pour une étude plus détaillée ?

Ces thèmes nous paraissent intéressants pour une étude, parce qu'ils présentent de différences à plusieurs niveaux, différences représentatives de l'ensemble des thèmes :

- en ce qui concerne la nature des savoirs et la structuration des mathématiques qu'ils permettent,
- en ce qui concerne l'enrichissement des conceptions sur l'apprentissage et de l'enseignement qu'ils favorisent,
- pour la place donnée à ces thèmes dans l'enseignement de l'école,
- pour la pertinence du thème pour illustrer certains concepts de didactique,
- en ce qui concerne la disponibilité des résultats de recherche.

Détaillons ces différences.

1. Nature des savoirs

On ne peut pas dire que la division euclidienne dans **N** structure particulièrement le savoir mathématique, mais elle représente une sorte de fermeture des trois autres opérations, dont elle réinvestit les propriétés. La division est une notion interne strictement aux mathématiques, elle n'importe aucune autre discipline dans les mathématiques. Elle est par contre un des outils de la proportionnalité.

La proportionnalité, cas particulier des fonctions numériques, est par contre un outil de généralisation et de modélisation puissant. De plus la proportionnalité amalgame savoirs mathématiques et savoirs extra mathématiques : en effet, les propriétés caractéristiques des fonctions linéaires permettent de reconnaître une situation de proportionnalité sous un tableau de nombres, le graphique d'une suite de points, le codage d'une fonction ; par contre la connaissance "concrète" de l'existence d'une proportionnalité effective entre deux grandeurs est nécessaire pour traiter numériquement certains problèmes : souvent, par exemple, il faut connaître l'existence d'une relation de proportionnalité entre la masse et le volume d'un solide homogène, ou entre la distance sur une carte et la distance réelle, ou entre le nombre de tours d'un pédalier et celui de la roue d'un vélo, pour répondre aux questions. La proportionnalité est une notion généralisatrice. A ce titre elle dispose d'outils de traitement et de reconnaissance variés.

Quant à la mesure, elle exprime une dialectique entre le numérique et le géométrique ; elle illustre une construction mathématique par le classement et le rangement et permet ainsi de rappeler d'autres notions mathématiques.

2. Modification des conceptions

Ces réflexions nous sont inspirées par l'observation de la stabilité des comportements cognitifs de nos étudiants au fil des années[102]. Ils seront en quelque sorte objectivés par le questionnaire qui a été soumis à une promotion en début d'année (dans la troisième partie).

Les étudiants savent utiliser la division comme outil de résolution de problèmes ; ils connaissent l'algorithme de la division, mais ne maîtrisent pas nécessairement son fonctionnement et ils ont totalement oublié sa justification. Les étudiants ont capitalisé un certain nombre de connaissances sur ce thème, mais celles-ci ne suffisent pas à l'enseignement. Une réflexion bien menée sur la construction d'un algorithme permet, nous semble-t-il, de définir la notion de "sens" attaché à une opération de l'école, d'envisager la dialectique entre techniques de calcul et problèmes, d'illustrer la démarche d'enseignement par résolution de problèmes "qu'on n'a pas appris à résoudre" et de prouver la faisabilité de cette démarche. Simultanément, l'étude de ce thème confronte les étudiants à la vétusté des pratiques (puisque certains manuels scolaires actuels enseignent encore la division comme un simple mécanisme à enregistrer, puis à reproduire) et à la difficulté d'accessibilité aux savoirs que ces pratiques engendrent (reproduction d'**une** procédure unique qui ne peut être comprise par tous).

---

102 Ces comportements pourraient se modifier avec les nouveaux recrutements nés de "la crise" : en effet les emplois de fonctionnaires et plus particulièrement d'enseignants deviennent plus brigués.

En ce sens, nous considérons que l'étude de ce thème répond fortement aux objectifs suivants du formateur :
- enrichir la conception de l'enseignement que se font les étudiants, pour un thème dont ils maîtrisent a priori les aspects mathématiques,
- prouver qu'une étude mathématique fine de la notion (plus fine que celle du simple utilisateur) est nécessaire pour l'enseignement de la notion.

Les étudiants se sentent moins à l'aise sur le thème de la proportionnalité. Ils utilisent des procédures hasardeuses pour résoudre des problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle. Ils ont des difficultés à séparer les problèmes relevant de la proportionnalité des autres : on constate souvent une confusion entre proportionnalité et croissance, confusion entretenue d'ailleurs par les média[103] (impôts proportionnels aux revenus,...). Une des premières tâches du formateur est donc de combler les lacunes mathématiques laissées par les enseignements antérieurs, de désacraliser la règle de trois ou le produit en croix, de relativiser l'utilisation systématique d'une procédure. Pour ce thème, l'étudiant joue beaucoup plus le rôle de l'élève qui apprend des mathématiques, que celui du futur maître qui apprend à les enseigner.

En ce sens l'étude de ce thème met l'étudiant davantage en situation de sujet apprenant, donc le confronte indirectement aux difficultés que pourront ressentir les élèves face à une notion nouvelle ou mal perçue dans un premier temps

Quant au thème de la mesure, disons qu'il combine des aspects des deux thèmes précédents. En effet, l'utilisation de certaines mesures, telles les longueurs ou les capacités, est parfaitement maîtrisée par les étudiants, mais il en est d'autres, telles les aires ou les volumes, qui nécessitent une étude mathématique complémentaire (il est courant de voir les étudiants confondre périmètre et aire). Le handicap de méconnaissance scientifique sur la mesure est cependant moins fort que sur la proportionnalité, les étudiants maîtrisant relativement bien l'aspect outil des savoirs sur la mesure. Ce qui peut permettre au formateur d'utiliser le réapprentissage d'une grandeur oubliée (par exemple l'aire) pour construire une progression adaptable à toute grandeur, donc d'amener les étudiants à une réflexion conjointe sur l'apprentissage et l'enseignement d'une grandeur.

En résumé, le thème de la division permet une réflexion directe sur l'enseignement, celui de la proportionnalité nécessite une mise à niveau mathématique des étudiants, et la mesure mêle ces deux aspects.

103 Pourrait-on aller jusqu'à la notion "d'obstacle médiatique" pour la proportionnalité ?

3. Place dans l'enseignement à l'école

La division et la proportionnalité sont des notions du cycle 3. Si le premier thème clôt l'étude des opérations classiques, du moins dans l'ensemble des nombres entiers, et est reconnu comme du domaine de l'école élémentaire, par contre le second est souvent considéré du ressort du collège ; il favorise d'ailleurs une ouverture sur les notions mathématiques à venir et permet une première structuration des problèmes numériques multiplicatifs.

La mesure se présente plutôt comme une notion transversale, puisqu'étudiée de la maternelle (longueur et nombre) au CM (aire et volume). C'est une notion typique de l'école, mais souvent considérée comme secondaire, parce que réduite à son cadre numérique.

4. Disponibilité de résultats de recherche

Ces trois thèmes ont été relativement bien étudiés ces dernières années au niveau de l'école élémentaire, comme le prouve la nombreuse bibliographie sur ces sujets (cf. la bibliographie pour chaque thème traité). Par contre, si des situations de formation sont disponibles sur la division et la proportionnalité, elles sont plus rares sur la mesure.

5. Intérêt pour la didactique

Il se trouve que par le croisement des diverses recherches, certains thèmes fournissent des situations que nous considérons plus pertinentes pour parler de la notion de variable (division et fonctions numériques), de champ conceptuel (division et proportionnalité), de jeux et de changements de cadres (proportionnalité[104]), de dialectique outil-objet (mesure des aires[105]), que ces situations soient attachées à l'école élémentaire ou qu'elles aient été construites dans une perpective de formation. Ces aspects seront soulignés dans l'étude par thème.

Un thème peut ainsi être ainsi plus spécifiquement attaché par le formateur à des concepts de didactique, qu'il permet particulièrement d'éclairer (d'enseigner ?).

B. Comment choisissons nous de traiter ces thèmes ?

Une des tâches du formateur est de déterminer quels contenus de formation attacher à chaque thème. En effet la première question que se pose le formateur est la suivante : pour enseigner telle notion de l'école, de quelles connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques le futur maître a-t-il besoin ? L'objectif final de la formation reste, quelles que soient les modalités de cette formation, de donner aux étudiants la meilleure préparation pour qu'ils assurent un bon enseignement, c'est-à-dire qu'ils mettent en place les conditions optimales pour un apprentissage d'une trentaine d'enfants.

---

104 "Etude du format A4", C.Houdement, M.L.Peltier, dans *Documents pour la formation des professeurs d'école*, pages 53-56, Pau 1992, IREM de Bordeaux.

105 "Aires de surfaces planes", C.Houdement, M.L.Peltier, idem pages 59-64.

Deux parties essentielles composent donc les savoirs de formation. D'une part, les savoirs mathématiques, d'autre part les savoirs liés à l'acte d'enseigner. Pour les savoirs mathématiques, on pense naturellement aux mathématiques de l'école, autrement dit celles qui permettent à l'étudiant de maîtriser tout problème élémentaire ; mais cet aspect utilisateur des mathématiques ne suffit pas ; l'enseignement nécessite la maîtrise d'autres aspects, du côté du savoir objet[106]. Le partage entre connaissances mathématiques et connaissances liées à l'acte d'enseigner subsiste, mais l'enseignement, notamment la construction d'ingénieries, amène à des approfondissements sur les mathématiques et leur épistémologie. Par sa fonction d'enseignant, le futur maître passe de la consommation de problèmes mathématiques à la production, dans la mesure où les situations qu'il va mettre en place doivent présenter de véritables défis mathématiques. Il doit donc connaître plus de mathématiques. La définition de la culture mathématique minimale pour l'enseignement du premier degré n'est pas évidente.

Pour chaque thème étudié, nous essayons donc de répertorier les différents aspects d'un thème qu'il nous semble indispensable qu'un futur maître aborde. Pour une meilleure lecture, nous distinguons trois rubriques que nous intitulons de la sorte :

- la première plutôt du côté du savoir, avec ses deux facettes, savoir savant et savoir à enseigner : de quel type de savoir dans les mathématiques en général ce thème est-il l'illustration ? quels sont ses liens avec les autres savoirs (savoirs savants ou savoirs enseignés à l'école) ? de quelle épistémologie relève-t-il ? existe-t-il des obstacles attachés à ce thème ? quelle a été l'évolution de l'enseignement de ce thème ? quelles séquelles de vieux programmes subsistent dans les habitudes ? etc.
- la deuxième plutôt du côté des élèves : conceptions a priori, processus d'apprentissages (notion de réseau de connaissances), type d'erreurs, etc.
- la troisième plutôt du côté du maître : les outils pour l'enseignement, manuels scolaires et ouvrages pédagogiques, des exemples de progressions (découpage de la notion en séances), d'évaluations, de situations, etc.

Ces trois rubriques ne sont pas disjointes ; la séparation ne vise qu'à simplifier la lecture. Chaque rubrique est séparée en plusieurs unités. L'explicitation des différentes unités que nous estimons constitutives d'une bonne connaissance du thème pour des adultes en formation réalise une proposition de savoirs de formation. Une étude des stratégies qu'il est possible d'associer à chaque unité ou à chaque regroupement d'unités permet de transformer ce catalogue de contenus en une ébauche de projet de formation, dans la mesure où un certain nombre de compétences professionnelles sera effectivement mis en place par la démarche utilisée pour la formation.

---

[106] L'exemple classique est celui de l'enseignement de la division euclidienne, dont le maître doit avoir parfaitement compris le fonctionnement de l'algorithme traditionnel et sa relativité, s'il veut être pleinement efficace, notamment pour faire évoluer les procédures naturelles des élèves vers des procédés plus économiques.

Nous allons nous livrer à cette étude sur la division d'abord, puis sur la proportionnalité, en nous inspirant des écrits sur ces deux thèmes[107]. Cette étude nous permettra de dégager certaines constantes dans les pratiques de formateurs au niveau des stratégies utilisées. Nous présenterons alors notre propre vision sur les stratégies en illustrant par une progression complète sur les grandeurs et leur mesure dans le chapitre 3.

II. Premier exemple : la division

Dans un premier paragraphe, nous présentons notre proposition de contenus de formation sur le thème de la division. Le type de rédaction que nous choisissons a comme finalité de rendre cette proposition la plus compréhensible possible dans sa problématique générale ; c'est pourquoi nous soulignons, en les citant, certaines unités qui, certes, occupent peu de place dans la progression, mais qu'il nous semble dommage de ne pas traiter. Les différentes unités définies ne seront pas nécessairement traitées en formation indépendamment les unes des autres. Leur conjonction définit pour nous le savoir de formation sur la division.

Dans le deuxième paragraphe, nous proposons des modes de traitement possibles pour ces différentes unités, essayant d'associer à chaque unité une stratégie.

A. Notre proposition de contenus sur la division

Nous reprenons le partage en trois rubriques, présentées précédemment.

1 - La division du côté du savoir

a - Quelle place a la division dans l'édifice des savoirs mathématiques ? Ici la division est regardée comme savoir plutôt objet.

b - La division comme outil dans la résolution de problèmes, les problèmes multiplicatifs et la notion de champ conceptuel.

c - La division comme technique : les algorithmes de recherche du quotient.

d - Evolution des présentations de la division euclidienne dans l'enseignement élémentaire au fil des années (en quelque sorte les trois unités précédentes vues dans l'enseignement).

2 - La division du côté des élèves

Etude de procédures utilisées par des adultes ou des enfants dans des situations de division : (analyse et évolution ; classification possible).

---

[107] Nous nous permettrons aussi de livrer un choix d'ouvrages liés à la formation professionnelle sur ce thème dans la partie bibliographique.

Etude d'erreurs : - la difficulté de gérer quotient et reste ;

- la non prise en compte des nécessités de partage équitable et de reliquat minimum.

3 - Des outils pour le maître autour de la division, dans le cadre global de la classe

Eléments pour une progression du CE2 au CM2.
Evolution conseillée pour l'apprentissage d'une technique.
Progression associée sur le calcul mental.
Etude de situations d'introduction de la notion.
Etude de manuels de CM1 sur les premières leçons sur la division.

Nous allons préciser plus ce que recouvrent pour nous ces unités et proposer des stratégies qui nous semblent possibles.

B. Etude plus détaillée de la division sous ses aspects savoir

Pour l'unité a

(1) Description détaillée

Bien entendu, les propriétés classiques de la division euclidienne (et leurs conséquences dans **N**) font partie de cette rubrique, notamment :

* les propriétés de Z comme anneau euclidien : pour deux relatifs entiers a et b non nul, il existe au moins un couple (q, r) de ZxZ tel que $a = b . q + r$ et $|r| < |b|$; de plus, si a et b sont respectivement dans **N et N***, le couple (q, r) est unique dans **N x N**.

* la structure de corps de **Q** : toute équation du type $a . x = b$, où (a, b) appartient à **Q*xQ**, admet une solution unique, notée b / a ;

* la densité de **D** dans **Q** : quelque que soit (a, b) dans ZxZ***,** quelque que soit n dans **N**, il existe m dans Z tel que $m \leq a / b \times 10^n < m + 1$;

pour définir et préciser les différentes divisions existantes selon les ensembles de nombres de référence considérés (division euclidienne, division dans l'ensemble des décimaux positifs à n chiffres après la virgule, division dans l'ensemble des rationnels positifs).

Il nous semble nécessaire de pointer la spécificité de la division par rapport aux autres opérations avec les étudiants pour souligner l'importance du contexte des problèmes dans toute tâche de résolution, modélisé en termes d'ensembles de départ et d'arrivée de fonctions. D'autre part la division euclidienne apparaît non pas comme une seule opération (fonction de **NxN** dans **N**), mais comme un couple d'opérations (la fonction quotient entier et la fonction reste) ; elle se différencie en cela des autres opérations de l'école. Cette différence de nature mathématique est donc susceptible d'engendrer des différences d'apprentissage.

La division euclidienne dans **N** doit trouver sa place par rapport aux autres opérations ; ce qui conduit à des éléments d'arithmétique. Après des rappels sur les notions de multiples, de diviseurs d'un nombre et les liaisons avec la multiplication, trop souvent considérée comme réciproque de la division, indépendamment des ensembles de référence, les propriétés d'anneau principal de **Z** nous permettent de définir de façon unique le plus petit multiple commun et le plus grand diviseur commun de deux nombres ou plus, et de passer à l'étude de congruences (traduites en termes de recherche de restes issus de division ou de critères de divisibilité, et de justification et limites des "preuves" (par 9, par 11) d'opérations). Cette étude débouche sur la notion de nombres premiers et le théorème fondamental de l'arithmétique, avec rappel d'algorithme effectif de décomposition, et l'existence d'une forme fractionnaire irréductible et unique, pour un rationnel.

(2) Quelle stratégie pour ces unités ?

A priori une *stratégie de type culturel*[108], visant à la restructuration des connaissances mathématiques, semble relativement naturelle. Elle présente cependant le danger de replonger les étudiants dans des rappels qui ne leur sont pas si lointains, sous une forme d'exposition suivie d'applications déjà vécue et apparemment peu efficace, et de ne pas leur permettre une réappropriation active de ces connaissances.

Il peut paraître plus adapté de mettre en place, pour des rappels sur la spécificité de la division, une *stratégie d'homologie*, consistant à faire effectivement résoudre des problèmes de division aux étudiants, au besoin en bloquant l'algorithme traditionnellement connu, et en les invitant à mieux cerner l'importance des divers contextes dans leur choix de divisions. Dans le même ordre d'idées, des situations comme la course à vingt[109] ou le jeu de Nim à un tas[110] fournissent de bons exemples de réinvestissement de la division euclidienne qui permettent de pointer les spécificités mathématiques de cette "opération". Un tel traitement des aspects mathématiques de la division permet de plus d'envisager simultanément la fonctionnalité de cette opération .

Une étude de la liaison entre division, rationnels et approximations décimales peut aussi être l'occasion de faire utiliser une calculatrice par les étudiants pour en discuter les avantages et les limites. En effet les divers affichages fournis par différentes calculatrices permettent de définir troncature et arrondi et de préciser la façon dont il faut en tenir compte dans les

[108] Cf. le rappel des définitions des stratégies dans la première partie , *L'analyse d'A.Kuzniak.*

[109] Jeu oral à deux : on part de 0 ; à tour de rôle, chaque joueur ajoute 1, 2 ou 3 au nombre dit par l'autre joueur : le premier qui dit 20 a gagné. Jeu favori de l'IREM de Bordeaux

[110] Jeu à deux avec 35 allumettes par exemple : à tour de rôle, chaque joueur retire 1, 2, 3 ou 4 allumettes du tas ; le joueur qui prend la dernière allumette a perdu. Cf. ERMEL tome 1, page 85

calculs. A ce titre cet aspect peut relever d'une *stratégie culturelle* ou, si la séance est davantage centrée sur la calculatrice, d'une *stratégie d'homologie :* il est en effet possible de faire travailler les étudiants selon une progression contractée, mais relativement homologue à celle que l'on pourrait suivre dans un C.M. Remarquons que, comme le précise A.Kuzniak dans sa thèse, des stratégies d'homologie sont assez propices à la connaissance et l'apprentissage d'un outil d'aide aux mathématiques.

Cette liaison peut aussi se faire via l'*homologie* d'une situation décrite par R.Douady et M.J.Perrin[111], dont l'objectif est de situer, par un jeu de questionnement limité ("la fraction est-elle plus grande que...", "plus petite que...", "entre...et..." ?), une fraction cachée dans un intervalle de longueur à préciser.

L'arithmétique peut bien sûr se traiter comme un cours traditionnel des classes secondaires d'antan et en cela relève des *stratégies culturelles*, mais il peut être un bon prétexte à des séances dites de calcul mental, ou plutôt de calcul pensé au sens que lui donne le ERMEL[112]. Par exemple des variations sur le jeu du furet[113] permettent aux étudiants de se remémorer progressivement les propriétés des listes de multiples et de reconstruire certains critères de divisibilité (principalement par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 10^n (n>1)). Les étudiants sont très dociles à ce type d'exercice bien qu'il les effraie au départ ; mais très vite il leur permet d'améliorer leurs compétences calculatoires. Cette utilisation du calcul mental en formation relève des *stratégies d'homologie*, dans un premier temps de type direct (puisque la structure des séances est exactement calquée sur celles que l'on conseille à l'école), au fur et à mesure que se réactivent les connaissances élémentaires des étudiants.

Mais il existe aussi des situations d'homologie de type indirect (puisqu'il s'agit d'amener l'étudiant à maîtriser des savoirs qui dépassent le cadre de l'école élémentaire), par exemple "Pavage et PGCD" (cf. annexe L, page 308), redonnant du sens au PGCD (par une recherche préalable sur le type de carreaux à utiliser pour paver un rectangle) et permettant de revoir la notion de nombre premier. Notons que cette situation nous sert aussi (comme d'autres d'ailleurs) à pointer quelques concepts de didactique : variable, aspects outil-objet d'une notion.

Un autre exemple d'utilisation d'une telle stratégie est celui fourni par A.Kuzniak dans sa thèse: "Les malheurs d'Alfred", problème extrait du livre *Objectif Calcul CM2* page 64[114], justement afin d'illustrer ce type de stratégie.

Pour l'unité b

---

[111] *Nombres Décimaux*, Liaison Ecole-Collège (1986), IREM de Paris 7, pages 63-76.
[112] ERMEL CE tome 2 pp 14-22 ; ERMEL CM tome 1 pp 96-115
[113] ERMEL CE tome 1, pages 80 et 85.
[114] A.Kuzniak (1993), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, page 136. Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

(1) L'unité que nous appelons "résolution de problèmes" présente deux facettes.
- D'un côté, il s'agit de redéfinir avec les étudiants les conditions nécessaires pour qu'un problème relève de la division euclidienne (partage équitable et reliquat minimum) et de revenir, à travers les problèmes, sur une nécessaire interprétation des résultats : les réponses demandées peuvent effectivement porter selon le contexte du problème sur le quotient entier par défaut, le quotient entier par excès, le reste. Seule cette "opération", la division, donne lieu à une telle variété de conclusions (les additions, soustractions, multiplications ne donnent lieu qu'à une seule interprétation).
- Plus généralement, elle permet de replacer l'étude d'une opération dans le contexte des problèmes pour lesquels elle est le meilleur outil, mais cet aspect ne peut s'envisager qu'après une étude de la proportionnalité, il s'agit là de redonner une unité aux apprentissages épars des étudiants et de relier la multiplication, la division et la proportionnalité : c'est l'occasion d'évoquer la notion de champ conceptuel.

Les deux référents principaux sont pour notre étude :
J.P.LEVAIN (1992) : La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educationnal Studies in Mathematics* Vol 23, pages 139-161.
G.VERGNAUD(1981) : *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Editions Peter Lang, Berne, pages 161-180.

Ces deux ouvrages proposent en effet une classification a priori des problèmes relevant des multiplication, division ou proportionnalité.

Cette étude est naturellement plutôt associée à une stratégie de type *transposition*, puisqu'il y a communication de résultats de recherche : mais elle peut bénéficier aussi d'un traitement de type homologie/action : notamment si cette information intervient après une mise en situation des étudiants pour dégager des principes analytiques de classement de problèmes choisis par le formateur dans des manuels. Cet apport d'information permet d'analyser la progression proposée sur les problèmes dans les manuels et de contrôler si le manuel évalue les élèves sur le même type de problèmes que ceux sur lesquels il les a entraînés.

(2) L'étude des algorithmes de la division est bien sûr incontournable dans une perspective de formation à l'école. En effet, l'étudiant doit comprendre le fonctionnement de l'algorithme traditionnel et sa genèse, et simultanément relativiser l'efficacité et l'unicité de celui-ci. D'où l'intérêt, nous semble-t-il, de le confronter à d'autres algorithmes de division euclidienne : par exemple nous étudions avec les étudiants de l'IUFM de Rouen la série de cinq algorithmes fournie en annexe M, page 311. Cette fiche est prétexte à une analyse des algorithmes et à une justification de leurs fonctionnements. La consigne liée à cette annexe est en effet de retrouver pour chaque division le quotient et le reste, de les localiser sur la fiche et de comprendre et justifier la méthode qui permet de les obtenir ainsi. Ce travail analytique peut être un bon prétexte à une réflexion sur l'influence des habitudes culturelles d'un pays sur les méthodes d'apprentissage.

A priori le formateur peut mettre en place sur cette étude des *stratégies culturelles* (étude individuelle ou en groupe des différentes méthodes, synthèse et justification collectives) ou des *stratégies d'homologie* indirecte (par exemple par la mise en place d'une activité de type message sur une des méthodes, message où il s'agit d'expliquer à un autre comment s'y prendre pour effectuer une division "à la manière russe" ou....). Dans ce dernier cas, la synthèse portera à la fois sur le contenu mathématique, et sur la mise en place et la gestion en classe d'une activité de communication.

Simultanément, et pour d'autres couples de nombres, nous redonnons leurs lettres de noblesse à certaines procédures mentales de calcul du quotient, par exemple à celles qui consistent à décomposer le dividende en multiples connus du diviseur choisi pour calculer le quotient comme somme des quotients partiels. Ainsi nous constatons que l'algorithme traditionnellement retenu dans une société n'est pas nécessairement celui qui est le plus efficace pour un couple de nombres donnés et un individu fixé, mais que par contre il est généralisable par sa grande automatisation.

(3) La réflexion sur l'évolution de l'enseignement de la division peut être prétexte à une étude fouillée de l'évolution des programmes et/ou des manuels[115], mais elle peut aussi se fonder sur quelques remarques issues de l'examen de manuels contemporains qui portent les vestiges des méthodes et habitudes anciennes. De l'enseignement vite mécanisé de l'algorithme de la division appliqué ensuite à maints problèmes, nous sommes passés à une sorte d'inversion de la démarche" : il s'agit de résoudre des problèmes de division "avant d'avoir appris à les résoudre"[116], et de partir des procédures naturelles des élèves.

Ce qui nous conduit vers la deuxième rubrique.

C. Etude du côté des élèves

Deux possibilités s'offrent au formateur pour disposer de procédures:

- aller sur le terrain récolter des procédures d'élèves de CM1 cherchant sur un problème de division alors qu'ils n'ont pas encore "appris" à résoudre de tels problèmes, comme par exemple le décrit H.Péault dans sa progression sur la division en formation dans les Actes du Colloque de Rouen page 91;
- utiliser un recueil de procédures récoltées dans les mêmes conditions, souvent commentées et analysées, par exemple dans les documents suivants :

[115] Un exemple d'étude de manuels est donné par la suite.

[116] "Peut-on résoudre un problème que l'on n'a pas appris à résoudre" ? J.LPorcheron, J.C.Guillaume, dans *Comment font-ils ?* , Rencontres Pédagogiques n°4 (1984), I.N.R.P.

- INRP(1985), *Comment font-ils?* (Rencontres Pédagogiques N°4), "Procédures utilisées par des enfants de cours moyen dans certain problèmes de division" par R.Neyret.
- I.F.M de Grenoble (1987), *Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques*, "Situations-problèmes de division et procédures".

Nous avons plusieurs années de suite pratiqué la première façon, quand la structure Ecole Normale permettait encore des échanges fructueux avec les classes d'application, sans complication administrative ; à notre avis, celle-ci présente plusieurs avantages :
- elle permet d'aller dans une vraie classe, de montrer un maître en situation organisant une recherche et gérant une synthèse ;
- elle convainc les étudiants qui, en général par groupes de deux, observent un groupe de deux enfants, de la non-linéarité des processus de recherche, de la non-unicité des procédures, de la variété et de la richesse des productions.

Globalement donc cette rubrique peut relever de *stratégies de monstration* (si l'on va dans les classes et dans la mesure où l'on peut profiter d'une "leçon modèle") et/ou *de transposition* (si on se livre à un regard analytique sur la situation de classe et/ou sur les procédures récoltées et qu'on en tire des conséquences pour l'enseignement). Il est aussi tout à fait possible, et je l'ai vu pratiquer par plusieurs formateurs débutants, de se livrer à un exposé magistral présentant les différentes procédures qu'on peut récolter dans des classes sur des problèmes de division et d'en montrer un classement possible, les étudiants se contentant de prendre des notes. Cette forme de transmission (de type culturel) tend à disparaître avec l'expérience comme formateur...

La deuxième unité, l'étude d'erreurs, se traite dans la continuité de la précédente ; elle peut s'appuyer sur les deux articles cités ci-dessus et sur les éventuelles productions d'élèves récoltées. Notons que le problème du Petit Poucet[117], cité dans le livre de l'I.N.R.P. permet presque toujours (avec les élèves comme avec les étudiants) de pointer la difficulté de gestion des deux nombres obtenus par un processus de division, le quotient et le reste (certains élèves annoncent un quotient entier approché par défaut, d'autres celui approché par excès, d'autres encore donnent le quotient par défaut et le reste, certains additionnent les nombres, d'autres encore essaient de donner un quotient "le plus exact possible" en utilisant une fraction pour résorber le reste). Selon le type de matériau récolté, cet aspect donnera lieu à une analyse de la part des étudiants et/ou à un bref exposé du formateur.

[117] Le petit Poucet se déplace par bonds de 28 km. Il doit se rendre d'une ville à une autre située à une distance de (par exemple) 228 km. Combien de bonds va-t-il faire ?'
Réponses possibles : 8 bonds, restent 4 km à faire ; 8 bonds et un peu plus ; un peu moins de 9 km ; 8 bonds et 1/7 ; 9 bonds (le dernier plus petit).

D. Etude du côté du maître

Cette rubrique vise à placer la division plus directement dans le contexte de la classe : comment mettre en oeuvre les remarques et études faites précédemment ? Il s'agit donc de réfléchir à un premier transfert des connaissances accumulées pour un effet "pratique". Cette rubrique conclut en général les diverses études précédentes.

La proposition d'une progression du CE2 au CM2 peut s'inspirer de divers ouvrages traitant de la question : qu'il s'agisse de livres du maître associés à des manuels scolaires conformes aux programmes et aux démarches officielles ou de livres type aides pédagogiques, tels le ERMEL ou le petit volume *Division* édité par l'A.P.M.E.P. Un exemple d'une telle synthèse est présenté en annexe N, page 312. Bien entendu ce résumé n'est qu'une vision d'ensemble de ce que représente la division à l'école et n'a comme but que d'aider à une meilleure lecture et analyse critique des manuels scolaires en tout genre sur ce thème.

Cette unité relève donc d'un exposé ou d'un renvoi à des ouvrages de référence, donc de *stratégies de type culturel.*

Les réflexions et études menées antérieurement permettent d'avoir quelques idées sur une progression pour la mise en forme de l'algorithme traditionnel par les élèves. Une synthèse sur ce sujet se présente souvent sous la forme d'un renvoi à la progression conseillée dans le ERMEL CM tome 1 pages 191 à 223, ou dans le livre du maître d'*Objectif Calcul CM1* (1987) pages 103 à 112 et d'*Objectif Calcul CM2* (1988) pages 61 à 65 et 164 à 169, notamment pour constater comment la progression globale préconisée dans le ERMEL peut se découper en étapes quotidiennes. Un travail de synthèse et la constitution d'une progression tirée de ces manuels peut être demandée aux étudiants comme évaluation du thème Division.

Cependant si le formateur a eu l'occasion d'expérimenter avec un maître formateur une progression dans une classe, il utilisera bien sûr les résultats de sa propre recherche soit pour remodeler les progressions des livres conseillés, soit pour intégrer les étudiants à la construction et à la réalisation des séances. On retrouve là une stratégie de formation par la recherche, mentionnée par A.Kuzniak dans sa thèse sous le nom de *stratégie de recherche applicative.*

Les deux dernières unités, l'étude de situations d'introduction de la division et des premières leçons des manuels, sont liées puisqu'elles concernent toutes deux le lancement du thème Division. Elles s'étayent de plus l'une l'autre puisque l'étude des manuels doit permettre de porter un oeil critique sur des situations introductives, donc de préciser à nouveau quelles conditions a priori doivent remplir celles-ci.

L'étude et la recherche de situations d'introduction de la division permet donc au formateur de préciser ses "préférences" en matière de contexte, structure du texte, difficultés de lecture, champ numérique des valeurs données, du quotient, propriétés numériques des nombres en relation (l'un multiple de l'autre, les deux multiples de 10, etc.), donc de parler de variables de la situation et de classer divers types de problèmes. Cette étude donne un regard plus critique sur les propositions des divers manuels. Elle relève naturellement de *stratégies de transposition.*

La dernière unité, l'étude des manuels sur les premières leçons liées à la division, joue un double rôle dans notre exposé ; il nous permet en effet :
- de donner une idée de l'état de l'enseignement de la division sur le terrain de la classe dans la mesure où les livres étudiés sont relativement suivis ; cette étude précise le contexte d'exercice de nos étudiants et permet de pointer quelques éléments de vétusté des pratiques ;
- de donner l'exemple du plan d'étude de manuels sur un thème fixé et de questions possibles pour éclairer le jugement des étudiants.

L'étude des manuels nous paraît fournir des indications appréciables sur l'état du "terrain". En effet, le formateur pourrait commencer une étude effective des pratiques dans les classes qu'il a l'occasion de "visiter" au cours de l'exercice de son métier. Mais c'est une tâche d'une trop grande importance si elle est menée sur chaque thème de formation, elle paraît irréalisable en temps et exploitation. Par contre l'étude des manuels les plus communément utilisés et suivis dans l'environnement de son centre de formation peut donner des éléments non négligeables d'information sur le traitement du terrain. C'est avec ces manuels que les étudiants feront sans doute leurs premiers essais parce qu'ils les trouveront comme manuels de la classe lors de leurs premiers postes, c'est ceux qu'ils suivront lorsque le statut de remplaçant les amènera à se couler plus ou moins dans les pratiques du maître titulaire (et dans la progression du manuel choisi par ce maître).

E. Exemple détaillé d'étude de manuels

Nous avons donc choisi d'étudier quatre manuels de CM1, particulièrement utilisés à notre avis dans notre académie (comme nous l'ont montré nos visites ou les comptes-rendus de nos élèves lors de leurs stages dans les classes), sur les premières leçons introduisant la division.

Précisons que cette étude fait aussi partie des réflexions que nous souhaitons mener avec les étudiants pour, d'une part leur proposer une utilisation éclairée des propositions de premières leçons, d'autre part pour les mettre en garde contre un suivi trop à la lettre de certains manuels qui présentent des enseignements en désaccord avec les directives des programmes et les connaissances sur les modes d'apprentissage des élèves.

Les pages des manuels étudiés figurent en annexe O de cette partie sur la division (page 315 et suivantes).

1. Objectif de l'étude

Cette étude nous permet, dans le cadre du travail actuel,

- de décrire sommairement, à travers quatre livres d'élèves parmi les plus utilisés, l'état actuel des types de productions d'auteurs de manuels sur la division euclidienne ;
- de donner le type d'interrogation que nous pratiquons habituellement avec nos étudiants lors d'une étude critique de manuels sur un thème.

Nous avons choisi pour cette étude :

- *Math CM1 Livre Outil* (1990), Editions Magnard. [LO]
- *Math CM1, Calcul et Géométrie* (1989), Chapuis, Editions Nathan [CG]
- *Objectif Calcul CM1* (1987), Clavier et al., Editions Hatier. [OC]
- *Math et Calcul CM1* (1987), R.Eiller, Editions Hachette. [MC]

2. Structure générale de ces manuels pour l'élève

Ils présentent tous, pour chaque "leçon"[118], quatre rubriques, appelées de noms variables, mais que l'on peut regrouper sous :

- calcul rapide ;
- activité de recherche ou de découverte ou préparatoire ;
- exercices et/ou problèmes ;
- aide-mémoire, fixant noir sur blanc les résultats jugés importants de l'activité préparatoire.

Parcourons les rapidement un par un.

- LO est divisé en 5 périodes avec une moyenne de 13 doubles pages par période (15 / 13 / 13 / 13 / 12), chaque double page correspondant à une leçon. Notons que cet ouvrage est le seul qui fasse explicitement une distinction, dans chaque leçon, entre *Exercices* et *Problèmes*. Chaque période comporte en outre deux doubles pages d'exercices résolus et deux doubles pages de problèmes de révision.
- CG se partage en 8 modules, soit 69 doubles pages et 8 bilans sous forme d'exercices. Il présente également des pages dites *Réserve d'exercices*.
- OC comprend 5 périodes de respectivement 17 / 15 / 17 / 14 / 13 doubles pages, une évaluation avec "ateliers de correction" et une réserve d'exercices variable selon les périodes. Le mot problème n'est ici utilisé que dans la progression concernant la *Résolution de Problèmes*.
- MC commence par une série de 10 bilans sur tous les thèmes mathématiques du CE2, puis se compose de 41 leçons réparties sur 3 trimestres (15 / 14 / 12), à raison de deux doubles pages par leçon, contenant une *Recherche*, des *Applications*, des *Problèmes* et du *Calcul mental*.

---

[118] On appellera "leçon" tout ensemble commençant par un nouveau titre.

Etudions maintenant les situations d'introduction de la division dans ces quatre manuels et les premiers exercices proposés sur les deux premières doubles pages utilisant le mot division dans leur titre.

3. Les leçons d'introduction

	LO pages 74 à 76	CG pages 82 à 85	OC pages 98 à 101	MC pages 94 à 97
Titres des leçons	La division : quotient exact. La division avec reste.	La division : sens de la division. La division : nombre de parts.	La division (1). La division (2).	La division.
Type de contexte du problème	Vie courante et jeu (répartition, distribution).	Histoire, vie courante (distribution, répartition).	Légende (déplacement par bonds). Vie courante (répartition).	Vie courante (répartition).
Champ numérique des valeurs données	230 par 46 75 par 3 68 par 5 40 par 6	12 par 3 8 par 2 30 par 5 12 par 3	5940 par 24 2984 par 12 1648 par 12 etc.	75 par 12 50 par 12 36 par 12
Grandeur du quotient	inférieur à 10 et exact dans 3 cas sur 4	inférieur à 6, toujours exact	toujours de 3 chiffres	inférieur à 10
Mots introduits dans la leçon	Division Quotient exact Quotient Reste.	Quotient exact. Reste Transformer une multiplication en deux divisions	Procédés divers Situation de division.	Quotient et reste de la division.
Exercices proposés	Calculs simples de divisions ; transformations d'écritures multiplicatives en divisions; problèmes de "division".	Complètement de multiplications simples à trous ; problèmes de partage.	Réutilisation des procédés de division donnés dans le mémento. Problèmes de "division" ou de "multiplication".	Calculs de quotients et de restes simples. Problèmes de partage, de déplacements sur droite par bonds.

Quelques critiques sur l'intro-duction	Valeurs numériques trop simples ; aides trop directives, ne laissant pas l'élève construire son propre sens du problème.	Valeurs trop faibles ; procédure imposée de soustractions successives (inadaptée) ; impossibilité à l'élève de se créer du sens.	Calculs intermédiaires longs (quotients de 3 chiffres), donc perturbateurs pour la construction du sens.	Procédures diverses mais imposées ; valeurs numériques un peu simples.

4. Conclusion possible de l'étude

L'introduction globalement la plus adaptée à l'introduction de la division est, à notre avis, celle de OC, à condition de ne pas perturber l'efficacité de la recherche sur la situation d'introduction par des calculs trop longs : le maître choisira donc des valeurs numériques de départ qui conduisent à un quotient entier non exact de deux chiffres seulement. Les extraits LO et CG (un peu moins MC) utilisent des valeurs numériques de départ trop petites, si bien que ne se justifie nullement la construction d'un algorithme nouveau : les problèmes présentés pourraient être résolus avec calcul mental par la majorité des élèves de CM1 ; ces problèmes relèvent plus d'une exploitation de la multiplication que d'une introduction de la division. MC présente trop vite des procédures de résolution sans que l'élève ait eu le temps et la possibilité d'imaginer les siennes propres.

Dans le choix des problèmes, nous conseillons à nos étudiants de prendre des situations de partage équitable, mais aussi de déplacements réguliers sur une droite. Plus tard se poseront d'autres types de problèmes multiplicatifs.

5. Quel regard sur le terrain permet l'étude de ces quelques manuels ?

LO et CG ont plus un enseignement de monstration que de construction du sens dans ces premières leçons sur la division, et cette remarque s'applique à l'ensemble des leçons de ces manuels. Par contre la simplicité de présentation de ces deux ouvrages et le contrôle permanent sur les productions d'élèves que permet la pauvreté des problèmes font que bon nombre de débutants et même de maîtres chevronnés sont tentés d'utiliser ces manuels, surtout lorsqu'ils se présentent comme des publications actuelles, donc "branchées". Pourtant une analyse plus fine permet de les percevoir en opposition avec les conseils actuels des programmes, justement à cause de la simplicité des problèmes qu'ils proposent à la recherche des élèves.

Par contre MC oscille souvent entre une directivité un peu forte, des situations un peu simples et de bonnes idées de recherche, mais dont les conseils d'exploitation laissent à désirer (les situations restent très fermées).

Ainsi, si certains manuels proposent une introduction de la division conforme à nos attentes pour l'enseignement, il en subsiste un certain nombre qui résiste encore à la modification des démarches d'enseignement préconisée depuis 1977 et qui conserve cet enseignement du plus simple au plus complexe, en associant la taille de la difficulté à la somme des traitements nécessaires pour trouver un quotient par l'algorithme traditionnel, ce qui donne une progression en termes de : division exacte par un nombre d'un chiffre, puis division avec reste, puis pose de la division, en "potence", puis division avec deux chiffres au diviseur, etc. Or ces livres sont encore utilisés dans bon nombre de classes. La pression sur le nouvel arrivant des maîtres qui les utilisent risque de perturber ce nouveau maître, il est donc utile de donner à celui-ci le maximum d'outils pour se décider et même, si possible, pour convaincre ses collègues de la nécessité de prendre en compte, de façon beaucoup plus marquée, les procédures naturelles des élèves.

Il nous semble ainsi que la division représente donc l'exemple d'un thème, qui, bien que faisant l'objet de progressions conformes aux conceptions du formateur dans certains manuels, est encore trop victime de restes de vieilles méthodes d'enseignement dans les pratiques des instituteurs. L'étude du thème de la division nous semble donc nécessaire en formation pour mettre en garde les étudiants sur des pratiques erronées et pourtant suivies. Cette étude peut même, à notre avis, devenir exemplaire dans la mesure où elle insiste sur la lenteur de la transformation des pratiques et la nécessité d'un regard critique sur les pratiques en place.

F. Traitement stratégique de la division

Nous avons annoncé les possibilités de traitement stratégique des différentes unités du thème de la division. Dans ce paragraphe, nous allons essayer d'illustrer, de façon le plus homogène possible, une stratégie pour la division. Nous jouerons un "jeu de la stratégie".

1. Principe de cet exercice

Cet exercice peut être considéré exercice d'école, mais nous essaierons de préciser à quelle occasion nous avons pu avoir l'impression qu'il était vraiment pratiqué, obtenant ces renseignements essentiellement par des discussions avec des pairs, de notre établissement ou d'autres en France, lors de rencontres annuelles.

Nous donnerons quelques indications de déroulement dans le temps, a priori si nous avons construit nous-mêmes la progression, en nous appuyant sur notre expérience d'enseignement, reprenant les indications des formateurs, dans la mesure où ils nous ont communiqué leur pratique.

Nous nous permettrons ensuite d'émettre une appréciation sur l'efficacité de cette stratégie, appréciation que nous puisons à deux sources :

- du côté des étudiants, en nous fondant sur des points de vue déclarés lors des bilans, des résultats aux travaux écrits, des quelques prestations effectivement contrôlées dans des classes ;
- du côté des formateurs, par leur discours sur l'efficacité pendant les cours (taux d'écoute et de réinvestissement des étudiants, transfert du discours reçu dans des situations d'enseignement) et leur appréciation qualitative du transfert de ces connaissances en situation d'enseignement.

Cette appréciation reste bien sûr qualitative et demanderait à être étayée. Ceci ne sera pas l'objet de notre travail.

2. Exemple de stratégie culturelle

a) Une proposition

Rappeler aux étudiants ce qu'est la division euclidienne dans N sous forme d'un exposé mathématique, éventuellement précédé d'exercices mathématiques préalables (sur trois heures), justifier ses propriétés et son algorithme traditionnel (sur trois heures) relève d'une *stratégie culturelle*, où le formateur exhibe le savoir savant sous toutes ses formes, comme cela a été évoqué dans la rubrique 1 du chapitre précédent.

Poursuivre avec la même stratégie consisterait, par exemple (sur deux fois trois heures) :
- à rappeler la place de la division dans la scolarité élémentaire et les niveaux de classes où il est souhaitable de la traiter ;
- à présenter des procédures d'élèves sur des textes de problèmes (par exemple celles données dans les recueils rappelés[119]) comme caractéristiques des élèves de CM1 ;
- exposer une analyse de ces procédures et de leur évolution ;
- donner l'exemple d'une progression ou renvoyer à un manuel reconnu dans le "milieu des formateurs de mathématiques du premier degré" (type[120]) ;
- renvoyer à des manuels scolaires reconnus opérationnels dans le "milieu des formateurs de mathématiques du premier degré et des maîtres d'application" (type (OC)[121]).

Nous reprenons le sens élargi de *stratégie culturelle*, en acceptant un côté pédagogique dans le culturel. En effet, la communication de résultats didactiques, sans en négocier la compréhension, relève elle aussi de la communication d'une culture, certes moins communément partagée que la culture mathématique, mais tout aussi importante pour l'enseignement. La stratégie peut tout à fait basculer du côté du culturel s'il ne s'agit que de

---

119- Collectif I.F.M (1987), "Situations-problèmes de Division et Procédures", *Formation des élèves-instituteurs et Didactique des Mathématiques*, IFM, Grenoble.
- Neyret R.(1984), "Procédures utilisées par des enfants de cours moyen dans certains problèmes de division" dans, *Comment font-ils? L'écolier et le problème de mathématiques, Rencontres Pédagogiques n°4*, INRP Paris.

120 ERMEL (1979), *Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire CE*, tome 2, Ed. Hatier, Paris.
ERMEL (1981), *Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire CM*, tome 1, Ed. Hatier, Paris.

121 *Objectif Calcul CM1* (1987), Editions Hatier.

transmettre des informations sur le sujet ; ce n'est pas de la transposition, dans la mesure où le formateur ignore le processus de transfert.

b) Quelques éléments d'appréciation sur cette stratégie culturelle

La culture mathématique, puis pédagogique est communiquée aux étudiants de façon relativement magistrale, ils n'ont que peu d'éléments de référence surtout s'il s'agit des premières séances de mathématiques et ne peuvent dans un premier temps qu'adhérer au discours du formateur, selon le principe de confiance du formé vers le formateur. Nous pensons en outre que cette pratique de formation ne nécessite pas une connaissance didactique fine. Nous avons pu constater qu'elle est souvent adoptée par le nouveau formateur en IUFM (du moins par ceux que nous avons pu côtoyer).

Cette stratégie tend à disparaître dès la deuxième année de pratique comme formateur, et elle n'est pas caractéristique des anciens professeurs d'école normale, selon ce que nous avons pu observer lors d'échanges entre pairs. Si elle est remplacée par d'autres stratégies, on peut légitimement penser qu'elle n'apportait pas toute satisfaction. Peut-être le manque d'engagement des étudiants ressenti par le formateur pendant ce type de séance (nous le citons pour l'avoir vécu) lui fait très vite préférer d'autres stratégies rendant l'étudiant plus actif, plus impliqué dans sa propre formation et permettant au formateur de contrôler davantage l'impact de son action pendant son cours.

3. Exemple de stratégies de monstration

a) Une proposition

A.Kuzniak en cite deux formes, selon que l'étudiant est observateur-acteur ou observateur-non acteur. Il décrit justement une progression possible sur la division que nous reprenons ici (nous renvoyons à son travail pour des explications plus détaillées)[122].

Sur sept séances de trois heures.

1 - Présentation générale de la division.
2 - A l'Ecole Normale, présentation et préparation de la séance à effectuer dans la classe.
3 - Dans la classe de CM1 [d'un conseiller pédagogique], les normaliens assistent à une séance menée par le maître (et ensuite par deux fois par l'un de leurs pairs). Un rapide bilan à chaud est effectué et quelques pistes sont données pour la séance suivante.
4 - Retour au point 2 (et ceci quatre fois).
5 - A la fin de ce cycle, présentation d'une programmation générale de la division, et enfin, évaluation des étudiants.

122 A.Kuzniak (1993), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, page 104, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

Ce type de progression, qui demande une collaboration fine entre un maître d'application et le formateur, trouvait bien sa place dans les anciennes écoles normales, compte-tenu du temps imparti et des possibilités de liaison simple et efficace avec les classes du terrain.

Elle présente de multiples avantages, cités par A.Kuzniak :

- montrer une introduction nouvelle de la division sur plusieurs séances, partant des procédures naturelles des enfants dans des problèmes pour arriver à des techniques plus "expertes" ;
- présenter une gestion de classe "inhabituelle" aux étudiants dans sa globalité ;
- donner l'exemple d'un enseignement constructiviste qui laisse à l'enfant une certaine part d'initiative.

b) Quelques éléments d'appréciation

Elle est en général bien appréciée des étudiants qui y voient les lignes de leur enseignement toutes tracées, avec des conseils et mises en garde de leurs pairs. Elle règle de façon relativement efficace la question de la division, permettant de mêler simultanément problèmes théoriques, didactiques et pédagogiques, selon l'opinion des formateurs qui l'utilisent, puisqu'elle fournit un plan naturel à l'évocation des questions jugées fondamentales pour l'enseignement de la division, tout en y intégrant des éléments de gestion de classe..

Mais dans le cadre global de la formation, il nous semble qu'elle n'est que peu propice à une décontextualisation, à un transfert sur d'autres thèmes. Or cette valeur exemplaire du thème que le formateur traite n'est pas négligeable dans la formation, dans la mesure où tous les thèmes de l'école ne pourront être traités la première année, a fortiori avant le premier stage en classe.

c) Autre proposition

Une autre séquence fondée sur la même stratégie, mais relevant d'une approche technologique (observation à travers un document vidéo) est la présentation et le visionnement du film "Algorithme de la division euclidienne", présenté par S.Gairin-Calvo dans la progression sur la division qu'elle propose dans les Actes du Colloque INTER-IREM des PEN d'Angers[123] avec les questions suivantes :

1) Résumez le déroulement de la première séquence filmée.
2) Le problème posé est "combien de rangées de 21 carreaux peut-on faire avec 2 664 carreaux". Exposez deux solutions trouvées par les enfants. Pouvez-vous en imaginer d'autres?
3) Dans la leçon suivante on part de 588 654 801 carreaux. Expliquez pourquoi.
4) En quoi la troisième séance diffère-t-elle des deux premières?

123 Gairin-Calvo Suzy (1987), Compte-rendu d'un travail réalisé en FP1 à propos de l'apprentissage de la division dans N, dans *Actes du Colloque inter-IREM des PEN d'Angers,* pp81-86, IREM de Nantes.

Le questionnement mené sur la séquence filmée par le formateur permet d'analyser plus finement la progression suivie sur les trois séances et permet de mieux cerner les contraintes qui ont amené aux choix numériques. Mais ces séquences filmées passent encore pour des leçons-modèles.

4. Exemple de stratégies d'homologie

a) Une proposition

Un exemple de stratégie de ce type est fourni par H.Péault[124] sur les cinq premières séances d'une progression d'une dizaine de séances d'1h30 (nous renvoyons à cet extrait pour de plus amples détails).

Les deux premières séances relèvent d'une stratégie *d'homologie indirecte*, alors que la troisième s'approche plus d'une *homologie directe* par son côté simulation.

> 1 - Mise en situation des normaliens sur un jeu "Concertum" visant à *redécouvrir* la division dans une situation inhabituelle et de faire une analyse didactique riche (notions d'action, de formulation, de validation ; les connaissances mathématiques sont considérées comme outils pour résoudre des problèmes, ne sont pas une fin en soi).
> 2 - Mise en situation sur un logiciel (DIVLOGO) construit par H.Péault lui-même pour que les étudiants inventent des stratégies diverses de résolution d'un problème de division et envisagent l'introduction d'un logiciel dans une progression.
> 3 - Simulation d'une situation de division (problème du Petit Poucet) dont il existe des protocoles de classes ; analyse des procédures des étudiants et des procédures des élèves.
> 4 - Exposé mathématique sur la division.
> 5 - Exercices mathématiques sur la division.

Cette première série se poursuit par une enquête dans des classes de CE2 et de CM1 où les normaliens par groupes de deux observent des groupes de deux enfants résolvant le problème du Petit Poucet (séance 6) et rédigent des chroniques d'observations, puis par une analyse de manuels (séance 7), une résolution de problèmes "pouvant faire appel à la division" par groupes avec production d'affiches et synthèse didactique par le formateur (séance 8) et se clôt par une évaluation (séance 9).

b) Quelques éléments d'appréciation

Certes ce type de stratégie permet au formateur de préciser ce qu'est un enfant en situation de recherche et de donner un exemple de conduite de grand groupe sur une des situations qu'il juge exemplaire. Elle fait l'économie d'une visite effective de classe avec les étudiants,

---

124 Péault H.(1988), Division en formation initiale, *Actes du Colloque inter-IREM des PEN de Rouen*, IREM de Rouen, pp 86-93.

puisqu'in vitro, elle reconstitue une image de sujets cognitifs en situation de recherche, les étudiants eux-mêmes.

Les étudiants sont mis au contact d'une démarche qu'ils auront eux-mêmes à mettre en place dans leurs classes. Ils sont confrontés en acteurs aux différences de cheminements des uns et des autres, à la difficulté d'entrer dans le raisonnement de l'autre,... bref peuvent prendre des indices (éventuellement pointés par le formateur) sur des déroulements de recherche. D'autre part ils assistent en observateurs (éclairés si le formateur l'a prévu) à la direction du grand groupe par le formateur. Ils peuvent profiter d'une succession de regards sur la situation vécue et simultanément compléter leurs connaissances mathématiques ou du moins repérer leurs manques.

Certes ils bénéficient d'un concentré d'éléments pertinents pour leur formation, mais :
- n'est-ce pas une accumulation trop importante de connaissances à ingérer simultanément ?
- Sont-ils aptes à passer successivement selon le bon vouloir de l'enseignant du côté de l'apprenant puis du côté de l'enseignant ?
- Comment transforment-ils ces connaissances lorsque un stage effectif sur le terrain dans une classe quelconque (non tenue par un conseiller pédagogique), peut leur renvoyer des pratiques en opposition ou presque (méthodes magistrales, réponse unique,...) avec ce que leur a conseillé le formateur ?
- Comme l'écrit A.Kuzniak, ne seront-ils pas tentés d'effectuer un "mauvais transfert", partant de la représentation d'une supériorité de pensée de l'adulte (qui sait) sur celle de l'enfant (qui ne sait pas encore), pour simplifier, et par là-même dénaturer les situations proposées ("dénaturation simplificatrice") ? Rappelons que A.Kuzniak constate effectivement cette dénaturation sur des évaluations d'étudiants en stage.

5. Exemples de stratégie de transposition

a) Une proposition

Compte-tenu de la manière dont elle se définit, il nous paraît difficile de commencer par appliquer une stratégie de transposition sur un public débutant la formation. On supposera donc qu'il s'agit d'étudiants déjà sensibilisés aux phénomènes de classe ou bien d'un groupe d'instituteurs venant en formation continue.

Un bon exemple de l'application d'une telle stratégie est l'analyse fine d'un protocole d'introduction de la division, comme le propose D.Butlen[125]. Cette analyse fine lui permet de pointer des concepts de didactique.

Nous reprenons donc son questionnaire avec de très légères modifications (le document à analyser est fourni en annexe P, page 323).

[125] Butlen D., (Cahors 1991) "Analyse d'une séquence sur la division au CM", *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, COPIRELEM tome 1, IREM de Paris 7, p123.

Questions possibles sur la séquence sur la division au CM1
(ERMEL CM tome 1 pages 66 et suivantes).

1) Choix de la situation

a) Dans quelle démarche d'apprentissage des mathématiques cette leçon s'inscrit-elle ?

b) Quel est l'objectif de la séquence ?

c) Quelles sont les variables de la situation ?

2) Organisation de la séquence

a) Dévolution du problème, étude de la consigne : que penser de la manière dont la maîtresse donne la consigne ? Pourquoi intervient-elle ainsi ? Cela a-t-il une influence sur la suite de l'activité ?

b) Quelle est l'organisation choisie par la maîtresse ? Est-elle pertinente ?

c) Quelles sont les différentes phases de la séquence ? Pour chaque phase quelles sont les interventions de la maîtresse ? Quelle est sa stratégie ?

3) Comportement des élèves

a) Analysez et classez, en fonction de critères que vous préciserez, les différentes productions des élèves.

b) Quelles autres productions aurait-on pu encore obtenir (par exemple dans d'autres classes) ?

4) Négociation et évolution du contrat didactique

Quels sont, au cours des différentes phases de la séquence, le problème pour les élèves, le problème pour la maîtresse ?

5) Institutionnalisation.

Analysez la dernière partie de la séquence. Que pensez-vous du choix de la maîtresse ?

D.Butlen cherche donc par ses questions d'une part à dégager la structure de la séance et la démarche d'apprentissage qui est sous-jacente, d'autre part à pointer les insuffisances de la conduite de classe, donc à préparer les étudiants à une adaptation de cette introduction à leur classe future. On peut donc dire qu'il cherche à contrôler (ou à donner des outils de contrôle pour) le transfert que peuvent faire les étudiants d'une telle séance-modèle.

b) Quelques éléments d'appréciation

Comme il a été rappelé précédemment, ce type de stratégie peut difficilement faire l'économie d'une connaissance de la classe par les formés.

Les stratégies de transposition sont plus difficiles, nous semble-t-il, à tenir sur un long terme, surtout dans leur aspect critique de documents ou étude de protocole : A.Kuzniak a en effet constaté que les étudiants soumis à de telles stratégies, certes deviennent aptes à critiquer, mais peuvent perdre toute confiance dans leurs propres réalisations et se sentir condamnés à faire "mal" quelque que soit le mode de traitement du sujet choisi. Le temps souvent limité permet en effet difficilement d'envisager un aspect constructif de ces stratégies (à travers la fabrication, la réalisation et le bilan de séances effectives dans les classes).

G. Conclusion sur la division

La division présente, pour chacune de ses unités constituant le savoir de formation, une variété de stratégies possibles. Il est même possible, au sens où cette pratique peut se rencontrer et donc ne parait pas aberrante, d'envisager une seule stratégie pour en traiter toutes les unités.

La division, par cette variété de stratégies possibles, apparaît donc comme un thème "riche".

Les autres thèmes sont-ils aussi riches ? C'est ce que nous allons examiner sur la proportionnalité.

III. Second exemple : la proportionnalité

A. Notre proposition de contenus

Comme pour la division, nous décrivons les trois rubriques qui permettent de regrouper les diverses unités de formation.

1 - La proportionnalité du côté du savoir

- Les fonctions linéaires, reconnaissance et traitement ; spécificité de ces fonctions par rapport aux fonctions numériques en général ; place des fonctions dans l'édifice des savoirs mathématiques.
- Outils d'étude des fonctions : tableaux de nombres, représentations graphiques, propriétés caractéristiques ou non,...
- Quels problèmes sont modélisés par quelles fonctions ?...Proportionnalité simple et "complexe" (proportionnalité multiple, enchaînement de proportionnalités,..). Vers la notion de champ conceptuel des problèmes multiplicatifs.
- Les différents cadres de la proportionnalité : contextuel, numérique, graphique, géométrique (lien avec le théorème de Thalès). Cadres contextuels et cadres de résolution : jeux de cadres et changements de cadres.
- Comment a évolué l'enseignement de la proportionnalité à l'école ?

2 - La proportionnalité du côté des élèves

- Types de procédures possibles dans la recherche d'une quatrième proportionnelle pour des enfants d'école. Evolution possible selon l'âge.
- Contextualisation de la proportionnalité et des autres fonctions numériques : quels exemples pour la classe ? Fonctions numériques dans l'environnement mathématique, dans celui des autres disciplines de l'école, dans l'environnement culturel de l'élève.

3 - La proportionnalité du côté du maître

Se placent ici les éléments usuels, déjà répertoriés dans le thème "Division", permettant l'intégration des réflexions précédentes menées dans une pratique professionnelle (éléments pour une progression, étude de situations d'introduction, à l'aide de divers manuels,...).

Plutôt que de rentrer dans le détail de chacune des rubriques comme nous l'avions fait pour le thème "Division", nous nous contenterons, à partir de l'étude d'écrits sur la formation professionnelle sur ce thème, de préciser les spécificités de ce thème par rapport au précédent.

B. Etude d'écrits de formation sur la proportionnalité

Nous étudierons quatre progressions pour la formation, celles présentées respectivement dans les ouvrages suivants, dans l'ordre chronologique de leur parution.

- PEZARD M.(1985), *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs*, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris 7, pages 252-302.
- Collectif issu du colloque de Quimper (1988), *La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée...*, pages 15-29, IREM de Rouen.
- H.PEAULT, "Proportionnalité", dans *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, pages 43-51, tome 2, COPIRELEM (Pau 1992), IREM de Bordeaux.
- DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M. (1993), *Se former pour enseigner les mathématiques*, 4. *Nombres et opérations, fonctions numériques*, pages 123-189, Edition Armand Colin, Paris.

1. Etude de la progression de la thèse de M.Pézard

La thèse de M.Pézard est une des premières à avoir dégagé une des spécificités de la formation professionnelle en mathématiques des futurs maîtres du premier degré, la nécessité d'une double institutionnalisation : la première sur les savoirs mathématiques eux-mêmes, savoirs indispensables à un enseignement conséquent, la deuxième sur les connaissances didactiques liées au thème.

Voici donc la progression proposée et testée par M.Pézard, sur des élèves en première année de formation (et bénéficiant de trois ans de formation à l'école normale), en six séances de trois heures.

1 - Passation d'un questionnaire révélant l'état des connaissances a priori des étudiants sur la proportionnalité.

2 - Mise en activité des étudiants sur une situation de proportionnalité, choisie pour ne pas être analogue à celle résolue par des élèves de CM2 pour que la résolution ne soit pas évidente, et prise dans le cadre géométrique.

La première partie est une situation de communication par groupes de deux : chacun dessine un triangle, puis écrit un message à l'autre de telle sorte que celui-ci réalise un triangle de même forme que le premier ; cette activité permet formateur de définir la notion de "même forme "en géométrie. La deuxième partie de la situation consiste en la construction par les étudiants de rectangles homothétiques. Elle est suivie par l'étude des procédures fournies par les étudiants et par une première synthèse.

3 - Mise au point sur la notion de proportionnalité.

Le formateur fait un exposé en s'appuyant sur le questionnaire et les problèmes déjà étudiés (notamment dans le questionnaire), en particulier sur les points suivants : caractérisation des suites proportionnelles, fonction linéaire, fonction affine, proportionnalité inverse, pourcentages, double proportionnalité, bilinéarité de l'aire et trilinéarité du volume par rapport respectivement aux dimensions .d'un rectangle ou d'un pavé droit.

4 - Résolution effective par les étudiants en groupe et comparaison de problèmes de proportionnalité, quant à leur présentation, leur complexité, les procédures possibles de résolution,.... Comparaison avec les résultats d'une enquête sur la réussite d'élèves de CM. Synthèse sur les variables d'un problème.

5 - Synthèse par le formateur sur l'enseignement de la proportionnalité, reprenant l'évolution de son enseignement, les structures sous-jacentes aux problèmes, les procédures possibles de résolution et leur évolution à l'école élémentaire, la diversité des problèmes relevant de cette notion, la place de la proportionnalité dans les fonctions numériques.

6 - Rencontre avec d'autres fonctions numériques : étude de problèmes ne relevant pas nécessairement de fonctions linéaires, étude raisonnée des outils permettant d'analyser les fonctions (tableaux de nombres, graphiques, codages fonctionnels, propriétés caractéristiques,..). Quelques conséquences sur les travaux préalables à faire faire aux élèves avant d'aborder la proportionnalité en CM.

Cette progression se termine par un test analogue à celui posé au départ et par un projet de cours niveau CM1-CM2 sur ce thème, réalisé par les étudiants.

M.Pézard signale les limites d'un tel enseignement et propose des variations susceptibles d'en améliorer l'efficacité.

Par le test de fin de formation, M.Pézard constate, sur le plan mathématique, des progrès des connaissances des étudiants, notamment dans le cas de la proportionnalité simple, mais plus incertains dans le cas des "proportionnalités" complexes (double proportionnalité, proportionnalité, enchaînement de plusieurs proportionnalités). Pour évaluer les éventuels progrès sur le plan didactique, elle s'appuie sur les projets de cours, qui lui permettent de constater :

- un point positif : "l'étude de la proportionnalité est replacée dans le cadre général des fonctions numériques", d'où l'étude parallèle proposée par les étudiants d'exemples et de contre-exemples de proportionnalité ;
- par contre, les changements de cadres sont peu utilisés, la plupart des problèmes se posent et se résolvent dans le cadre numérique.

Elle propose donc des améliorations pour sa progression :

- du point de vue mathématique : une étude plus précoce avec les étudiants des cas complexes de la proportionnalité et une plus grande utilisation du graphique comme outil de prévision ;
- du point de vue didactique : une réflexion plus poussée avec les étudiants sur le choix des situations-problèmes, notamment une analyse de la tâche détaillée (structure du problème, domaine numérique, procédures possibles pour les élèves,...) ; des analyses de séquences réalisées en classe,...

Analysons ces propositions.

Ce premier travail complet sur la formation à la proportionnalité s'appuie principalement sur une stratégie d'homologie pour :

- d'une part, déceler les manques et compléter les connaissances mathématiques des étudiants ;
- d'autre part, disposer d'un panel de procédures de résolution qui permettront au formateur de mieux ancrer ses compléments didactiques et de rendre l'étudiant capable de comprendre et d'analyser des procédures d'élèves.

L'amélioration proposée de la progression, sur le plan didactique, peut être interprétée en termes d'intégration de stratégies de transposition sur le thème (mais plus sous un aspect constructif que critique, notamment par une réflexion sur le choix de situations), stratégies qui devraient permettre un meilleur transfert dans la pratique de classe des savoirs didactiques.

2. Etude de l'ouvrage consacré à la proportionnalité, *La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée*

Cet ouvrage, issu d'une réflexion collective des années 87-88 de professeurs d'école normale réunis en colloque, est né du constat que la proportionnalité restait mal enseignée dans les classes (et ce malgré les publications récentes ERMEL CM) et apparaissait aux maîtres comme une notion nouvelle du cours moyen sans ancrage sur les notions mathématiques travaillées antérieurement. L'ouvrage se donne donc comme objectif d'aider le maître à pointer dans les mathématiques qu'il présente aux élèves, plus tôt qu'il ne le fait usuellement, des exemples de situations de proportionnalité, pour amorcer avec eux un traitement adapté de ces situations, visant à long terme l'objectif du cycle 3, qui est la reconnaissance et le traitement de situations de proportionnalité.

Cet ouvrage propose une progression dans ce sens (pages 15 à 29) à l'aide de mises en situation des étudiants successivement sur :
- une recherche d'images de nombres (savamment choisis) par diverses fonctions numériques modélisant des problèmes de CM, ceci afin de dégager les notions mathématiques de codage fonctionnel, propriétés diverses (écarts, linéarité,...) ;
- une étude conjointe de tableaux de nombres, textes de problèmes, représentations graphiques qu'on leur demande de compléter et d'associer, ceci afin de dégager et définir les grandes classes de fonctions particulièrement rencontrées à l'école : fonction linéaire, affine, inverse proportionnalité, puissance, exponentielle,...

Ces études sont suivies d'informations mathématiques sur les fonctions citées, notamment sur la justification de leurs propriétés et sur des exemples de problèmes qui en relèvent, puis par des propositions de travaux individuels destinés aux étudiants réinvestissant l'ensemble des connaissances mathématiques rappelées.

Les auteurs complètent la progression par diverses informations de nature psychologique et didactique telles que : évolution des programmes et de l'enseignement sur ce thème, influence des structures sur la résolution de problèmes (d'après les travaux de G.Vergnaud), proportionnalité et autres disciplines,....; enfin ils présentent une mise en oeuvre de la proportionnalité dans les classes. Sont également proposés des travaux de réinvestissement individuels hors classe amenant les étudiants, soit à analyser des extraits de manuels présentant la notion, soit à classer des problèmes de manuels selon la fonction dont ils relèvent.

Le déroulement de cette progression, que nous avons effectivement pratiquée, demande environ une douzaine d'heures.

Analysons cette progression relativement à la précédente

Cette progression met davantage l'accent sur les aspects mathématiques de la proportionnalité, prenant en compte les améliorations proposées par M.Pézard. On note, dès la deuxième séance, la volonté de faire rencontrer aux étudiants des situations relevant de proportionnalités complexes (inverse proportionnalité et double linéarité) et de leur faire utiliser la représentation graphique comme outil d'analyse. Si l'on étudie les stratégies sous-jacentes, il semble que les stratégies d'homologie sont majoritaires dans cette progression, et qu'elles sont plutôt de type indirect[126], si l'on examine plus en détail le choix des problèmes d'étude et des fonctions sous-jacentes (fonctions linéaires, affines, puissances certes, mais aussi exponentielles, affines par morceaux). Ce type de stratégies était déjà dominant dans la progression de M.Pézard.

Les compléments didactiques semblent uniquement transmis sous forme d'exposés, donc, si on tient compte des remarques de M.Pézard, ne devraient pas apporter d'améliorations sensibles sur le plan des connaissances didactiques des étudiants.

3. Etude de celle proposée par H.Péault

Elle est prévue sur environ cinq séances de deux heures.

1 - Première analyse de procédures utilisées en situation de proportionnalité.

Résolution par les étudiants du problème suivant (d'évaluation en début de sixième)

Trois plateaux de fruits sont à l'étalage d'un marchand de primeurs. L'étiquette du premier plateau indique que l'on peut avoir 8 oranges pour 4 F, l'étiquette du second plateau indique 2 F pour 3 citrons et celle du troisième plateau indique 4 F pour 7 poires. Quel est le fruit le plus cher ? Quel est le fruit le moins cher ?

Classement des procédures utilisées par les étudiants.

Après une brève analyse a priori s'appuyant sur l'étude de la structure du problème, étude de procédures d'élèves de sixième et analyse d'erreurs.

Définitions et recherche des variables didactiques de ce problème.

2 - Vers une caractérisation mathématique de la proportionnalité.

Recherche de correspondance entre des situations et des graphiques sur axes dont les graduations ne sont pas marquées.

Recherche de procédures permettant de compléter un tableau de proportionnalité incomplet du type

3	5	7	8	15

permettant de faire une synthèse sur la caractérisation de la proportionnalité par une fonction multiplicative, les propriétés de linéarité, la représentation graphique, de définir d'autres fonctions telles que fonction affine, fonction puissance, fonction homographique, fonction exponentielle.

Recherche de procédures sur un problème simple de recherche de quatrième proportionnelle. Comparaison de procédures.

[126] Le savoir communiqué dépasse celui de l'école, il n'est destiné qu'aux étudiants.

Evolution des programmes liée à une certaine liberté d'utilisation des procédures.

Comparaison entre proportionnalité et croissance : les abus de langage commun.

3 - Réflexion sur des aspects didactiques de l'enseignement de la proportionnalité.

Exposé sur les approches et comportements des élèves de CM et de sixième sur cette notion.

Etude par groupe de deux extraits de manuels présentant une situation de comparaison de prix dans un magasin. Synthèse sur l'analyse de la tâche de l'élève dans chacun des cas.

4 - Etude de : la proportionnalité dans un cadre autre que numérique.
la proportionnalité multiple

* Par une mise en activité des étudiants sur un classement de rectangles selon leur coefficient de forme (rapport longueur/largeur), découverte de procédures géométriques possibles. Lien avec le théorème de Thalès. Définition des cadres.

* Résolution d'un problème relevant d'une fonction de type $(x, y) \rightarrow axy$. Notion de bilinéarité.

5 - Analyse didactique en groupe d'un document présentant une situation de classe liée à la proportionnalité (le puzzle de G.Brousseau). Synthèse du formateur.

Ces séances sont complétées par la recherche par les étudiants d'exercices sur la proportionnalité et la distribution par le formateur d'un document de synthèse sur la proportionnalité à l'école reprenant les divers exposés.

Analysons cette progression par rapport aux deux précédentes

Il semblerait que cette progression montre une plus grande mise en action systématique des étudiants (les amenant à une première réflexion avant que le formateur ne conclut sur la question) et un équilibre entre apports disciplinaires et didactiques. Globalement la part des stratégies d'homologie et mais surtout de transposition augmente par rapport aux progressions précédentes aux dépens des stratégies culturelles. D'autre part, certaines des connaissances didactiques font explicitement l'objet d'une institutionnalisation, comme les notions de cadres, de variables didactiques.

4. Etude des éléments de formation proposés dans l'ouvrage *Se former pour enseigner des mathématiques*

Cette série de quatre tomes est destiné a priori au formateur d'enseignants du premier degré en mathématiques, comme aux futurs maîtres. Une lecture attentive le montrerait plutôt plus utile au formateur qu'à l'étudiant novice.

Sur chaque thème retenu se juxtaposent trois parties principales : des informations historiques, mathématiques ou psychologiques sur la notion ou son environnement, une partie intitulée *Activités pour les enseignants en formation*, une autre *Activités pour les élèves de l'école élémentaire*. La distinction entre ces deux dernières parties n'est pas toujours très claire, car l'on retrouve dans la troisième partie encore des propositions d'étude de travaux d'enfants avec les étudiants.

Nous considérerons donc l'ensemble de ces trois parties comme une référence possible pour le formateur, sans nous intéresser à la lecture de ces ouvrages par l'étudiant[127].

Le thème Fonctions numériques, qui nous intéresse plus particulièrement, comporte donc un bref aperçu historique sur la notion, suivies d'informations mathématiques, d'abord sur les fonctions numériques (pages 113...), informations dont il est dit qu'elles "ne sont jamais données telles quelles aux étudiants" (sic!), puis sur la proportionnalité (pages 127 et suivantes).

Etudions plus particulièrement les autres parties.

La deuxième partie propose deux classes d'activités, la première *à propos des fonctions*, la seconde *autour de la proportionnalité*. Notons que les situations proposées sont souvent extraites d'ouvrages déjà parus, le plus souvent d'aides pédagogiques pour le CM ; elles s'intitulent respectivement,

> *à propos des fonctions* :
> (1) recherche des fonctions numériques sous-jacentes à des problèmes de l'école (page 134) ;
> (2) lecture de graphiques de l'environnement de l'école ; lien entre représentation et interprétation (page 138) ;
> (3) le cube peint : résolution d'un problème par l'utilisation d'une fonction (page 142, d'après ERMEL CM tome 3) ;
> (4) utilisation de fonctions pour mieux calculer (page 144), où le formateur fait faire aux étudiants différents exercices de calcul mental (souvent extraits du ERMEL CM) ;

---

127 En effet le type de rédaction choisi par les auteurs laisse penser qu'ils croient les étudiants capables d'un double transfert autonome : la seule lecture des diverses situations qu'ils pourraient vivre en formation leur permettrait de compléter leurs connaissances mathématiques et de se forger une idée de son enseignement !

puis, *autour de la proportionnalité* :
(5) représentation graphique de fonctions liées à des problèmes de l'école (page 147) ;
(6) classement de situations de l'école en les associant à leur représentation graphique, selon qu'elles relèvent ou non de la proportionnalité (page 148) ;
(7) découverte et traitement de la proportionnalité dans le cadre géométrique (page 154, d'après une situation de R.Charnay[128] pour les élèves de CM2 ou 6ème) ;
(8) utilisation d'un logiciel pour l'école visant à faire mettre en relation la notion de variable informatique et celle d'échelle.

Ces activités sont décrites en termes d'objectifs mathématiques, de matériel nécessaire et d'indications sur le déroulement prévu. Chaque activité proposée est suivie d'une brève analyse. Cette analyse se limite très souvent à une analyse mathématique de la situation, précisant ce qu'il est possible de pointer en mathématiques à l'issue de l'activité menée avec les étudiants. Des aspects didactiques sont cependant soulevés à partir de l'activité (3), soit proposant des alternatives de mise en place de la situation avec les étudiants (par exemple pour (3) le choix d'un autre cadre pour poser le problème, pour (4) la mise en évidence -sans les nommer ainsi- des variables de la situation), soit explicitant les choix et décisions du formateur (pour (5) et (6) explicitation du choix des auteurs pour les situations, pour (7) explicitation d'un objectif didactique).

Dans la partie intitulée *Activités pour les élèves de l'école*, les auteurs proposent non pas directement des idées de progressions ou des développements de situations "clés en mains", mais refont des propositions de situations de formation, consistant par exemple
- à analyser un problème d'école et à envisager une mise en oeuvre dans une classe d'activités menées préalablement avec les étudiants, ou à analyser les travaux d'enfants sur ce problème,
- ou bien à analyser des travaux d'élèves sur un problème traité par les étudiants eux-mêmes et exploité mathématiquement par le formateur dans une phase préalable.

Figurent également quelques idées de problèmes pour la classe et visant à l'apprentissage du thème, mais sans exploitation préalable, ni conseils de mise en place pour les futurs maîtres.

Analysons cet apport par rapport aux précédents

Il est plus difficile ici d'analyser l'ensemble des propositions dans la mesure où il ne s'agit que de situations éclatées qui ne sont pas constituées en progression. Cependant il semble que cet ouvrage propose davantage de situations visant à l'enrichissement et à la restructuration des connaissances mathématiques que des connaissances didactiques, et on peut mal évaluer

[128] Charnay R. (1987), *Des problèmes pour apprendre en CM2 et en 6ème*, pages 30 à 32 ; IREM de Lyon.

sur cette rédaction la place de l'institutionnalisation didactique. Cependant le type de stratégies essentiellement employé est l'homologie, le plus souvent d'ailleurs de type direct, puisqu'il s'agit souvent pour les étudiants d'examiner, après avoir étudié le problème, des travaux d'enfants ayant résolu ce même problème. Pas ou peu de situations de type transposition sont effectivement développées, dans la mesure où un savoir théorique de référence n'est jamais explicitement pointé.

C. Conclusion

A la différence du thème Division, il n'est aucunement fait mention dans ces études relativement complètes, de stratégies de monstration, et les stratégies d'homologie ont la part belle par rapport à celles de transposition. Mentionnons toutefois un travail complet relevant de la transposition sur le thème de la proportionnalité, l'étude comparée de trois situations sur la proportionnalité dans le cadre géométrique, proposée par R.Charnay[129] et que A.Kuzniak évoque dans sa thèse[130].. Ce travail très riche est cependant d'un abord difficile pour des étudiants autres que ceux terminant leur formation puisqu'il permet d'évaluer en quelque sorte l'impact de la formation sur les conceptions de l'enseignement qu'ont les étudiants, puisqu'il vise à comparer des démarches pédagogiques.

Aucune stratégie culturelle mathématiques n'est évoquée par ces professionnels de la formation, à part peut-être dans l'ouvrage *Se former pour enseigner des mathématiques* lorsqu'il est question d'informations historiques, mathématiques (mais le mode de communication de ces informations aux étudiants n'est pas communiqué).

En résumé donc les écrits sur la proportionnalité livrent essentiellement des stratégies d'homologie et de transposition.

IV. Quelle efficacité des stratégies en déduire ?

A. Conclusion de l'étude sur la division et la proportionnalité

1. Comparaison des deux thèmes au niveau stratégique

Nous avons étudié deux thèmes mathématiques, la division et la proportionnalité, essayant pour la division de répertorier ou de construire des stratégies associées, pour la

[129] Charnay R. (1988), Comparaison de situations sur le thème "Agrandissement de figures et proportionnalité", dans *Actes du Colloque de Rouen*, IREM de Rouen, pp57-63.

[130] A.Kuzniak (1993), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, page 168. Thèse de Doctorat, Université Paris 7

proportionnalité de recenser dans les écrits sur la formation quelles stratégies lui étaient plus spontanément attachées.

La division nous est ainsi apparue comme un thème riche, prétexte aux trois stratégies dites "professionnelles" décrites dans la première partie de notre travail, pouvant même à la limite ne relever que d'une seule stratégie.

La proportionnalité ne nous a pas montré de stratégie de monstration, relève essentiellement de stratégies d'homologie, et, mais moins, de stratégies de transposition.

Essayons d'expliquer ces différences

Dans l'étude préalable sur les savoirs nous avions tenté de différencier la nature de ces deux thèmes, du côté du savoir savant et de celui de l'enseignement.

La division n'offre pas la puissance généralisatrice des fonctions, reste interne aux mathématiques ; elle produit des effets observables après un temps d'enseignement plus court que la proportionnalité, ce qui peut expliquer une différence de traitement stratégique de ces deux thèmes en formation : des stratégies de monstration demanderaient un temps de monstration beaucoup trop long pour illustrer autre chose qu'un aspect très pointu de la proportionnalité ; la division, plus "compacte", peut par contre utiliser plus efficacement ces stratégies, puisque les effets de l'enseignement sont visibles sur un temps court.

L'enseignement préconisé par les programmes des fonctions numériques à l'école n'a que peu de relation avec celui que les étudiants ont comme souvenir sur ce thème : étude de l'ensemble de définition, des variations, de la représentation graphique ; peu ou prou de contextualisation ; peu de discussions sur la variabilité des procédures liées à tel problème. Les savoirs nécessaires à l'enseignement des fonctions numériques ne seront pas ceux qui ont été institutionnalisés les années antérieures. Il nous semble qu'une stratégie culturelle permet plus difficilement de relativiser les connaissances antérieures et de reconnaître le caractère différent des nouvelles, car elles ne permettent pas à l'étudiant de confronter ses anciennes connaissances aux nouvelles demandes. Par contre, des démarches de type homologique peuvent sans doute permettre une prise de conscience, en acte, d'une autre façon d'aborder les fonctions (parce qu'elles nécessitent un nouveau regard sur la proportionnalité), donc une augmentation et simultanément une réorganisation des connaissances sur ce thème. A notre avis, une stratégie de monstration est moins propice à cette restructuration simultanée des connaissances, l'attention de l'étudiant étant trop attirée par les phénomènes didactiques (ou perturbée par sa méconnaissance mathématique). Enfin des stratégies de transposition trouveront leur place plutôt en fin d'apprentissage de cette notion, lorsque les étudiants ne seront plus distraits de la réflexion didactique et pédagogique par leurs incompétences.

La division euclidienne est par contre une notion mathématique dont tous les aspects "outil" sont généralement maîtrisés par l'étudiant. L'étudiant a capitalisé un certain nombre de connaissances à ce sujet, mais cette capitalisation peut ne produire que des effets mécaniques.

Il s'agit de redonner l'occasion d'attacher du sens à une gymnastique algorithmique usuelle, d'aider à illustrer, par des situations d'enseignement, la progression sur ce thème. Des stratégies de monstration peuvent donc être choisies, puisqu'elles aideront à relativiser les phénomènes d'apprentissage et d'enseignement dans une classe. De plus, sur une séance il est possible d'illustrer la notion de recherche liée à un problème et de variété des procédures, variété restreinte à l'échelle de la division.

Il semblerait donc possible d'analyser certaines différences de traitement stratégique de ces deux thèmes par leur "nature mathématique" différente et les connaissances qu'ont les étudiants sur ces thèmes.

2. Notre choix pour la division

Nous reprenons ici une courte étude sur ce thème car il a été décrit comme pouvant relever de n'importe quelle stratégie. Mais quel choix retenons nous dans cette variété ?

Nous exposons la progression effective que nous jugeons la plus opérationnelle, mais seulement dans ses grandes lignes, compte-tenu des descriptions déjà fournies dans le paragraphe II, et en pointant les aspects mathématiques et didactiques. Il faut préciser que nous avons toujours placé la division parmi les premiers thèmes étudiés.

La première phase est une séance d'homologie directe : mise en situation d'étudiants sur des problèmes de division, sans qu'ils puissent directement utiliser l'outil division, les problèmes étant choisis parmi des problèmes d'introduction que nous jugeons possibles pour une classe de CM. Cette recherche est en général menée par groupes de trois ou quatre, avec production d'une affiche où chaque groupe doit expliquer sa démarche. La synthèse porte d'une part sur les variétés de procédures de division, les diverses propriétés mathématiques utilisées et la relation avec l'algorithme usuel, d'autre part sur la méthodologie de classe associée à une recherche, la notion de variable didactique (choisie liée au contexte et au champ numérique des problèmes). L'institutionnalisation mathématique porte sur la notion de division euclidienne dans l'ensemble des entiers, ses définitions et les propriétés qui justifient les procédures, il n'y a pas encore d'institutionnalisation didactique.

Cette phase est suivie en général de compléments mathématiques, avec une stratégie de type culturel.

La deuxième phase consiste en l'étude de productions d'élèves sur des problèmes du même type, si ce ne sont exactement les mêmes, que ceux traités par les étudiants. Ces productions d'élèves sont, quand c'est possible, recueillies directement par les étudiants lors d'une séance d'observation en classe[131]. L'organisation est la suivante : un groupe de deux étudiants observe

---

[131] Une telle récolte, puis analyse de procédures d'enfants, nous semble cependant sans intérêt, si elle n'a pas été précédée par une prise de conscience préalable, par les étudiants, de leurs propres processus de recherche sur de

et assiste un groupe de deux élèves de CM1 qui résolvent un problème de division, avant d'avoir appris la division[132], selon les modalités fixées par le formateur, puis rédige le protocole de cette recherche ; ces protocoles d'observation sont étudiés par la classe des étudiants lors de la séance suivante (les protocoles peuvent également être fournis par le formateur).

Par une organisation de séance du type homologie/action (étude par groupes de quatre, cinq des productions, préparation d'une organisation des procédures par notion mathématique sous-jacente sur affiche), les étudiants analysent les différences et la relation à la division des diverses productions, et cherchent à commenter les erreurs. Nous communiquons les connaissances didactiques sur les types de procédures de la division et leur prise en compte dans une progression pour l'école : à cette occasion, nous précisons certains concepts didactiques -situation de recherche, phases d'une recherche, etc.- en confrontant la séance où les étudiants ont été actifs et celle observée dans la classe élémentaire.

Ces deux premières phases ont essentiellement comme objectif de préciser nos attentes sur les premières situations de division et de permettre aux étudiants un début d'analyse a priori de problèmes de division.

Ajoutons que la progression sur la division avec les étudiants est doublée en permanence de séances de calcul mental (avec une stratégie d'homologie directe, puis progressivement indirecte, cf. page 95) permettant de définir en acte les notions de multiple, d'encadrement par deux multiples etc. et proposant simultanément des idées d'activités de calcul mental dans les classes.

La troisième phase est une séance de transposition sur l'étude comparée de manuels sur la division euclidienne dans un CM1, plus exactement sur les premières séances sur ce thème (cf. page 100 et suivantes). Son objectif est d'intégrer l'utilisation d'un outil de travail du maître, manuel de l'élève et livre du maître dans la réflexion sur le thème, et simultanément de confronter l'étudiant à des résistances aux propositions faites par le formateur (certains manuels sont critiquables sur leurs choix, compte-tenu des cadres de référence choisis par le formateur). Il est alors temps d'expliciter ce cadre devant les étudiants.

---

tels types de problèmes. C'est pourquoi nous organisons préalablement une séance où ils sont eux-mêmes amenés à résoudre des problèmes de division avec une interdiction de notre part d'utiliser effectivement la division.

[132] On voit immédiatement la teneur du possible : il faut qu'il existe des classes d'application de CM1, n'ayant pas traité la division à cette époque de l'année, et acceptant de démarrer leur progression sur la division avec cette suite de problèmes.

Cette phase donne lieu à la communication d'éléments pour une progression sur la division du CE2 au CM (cf. annexe N page 312) et précise certains concepts de didactique : variable, dévolution, etc..

La quatrième phase est consacrée à une partie de la progression précédente, l'apprentissage de la technique. Tout en relativisant cet apprentissage à la recherche de problèmes choisis et la pratique régulière d'activités de calcul mental, nous nous livrons avec les étudiants à une réflexion sur la notion d'algorithme et sur la genèse du "nôtre". Une étude comparée de différentes techniques (cf. le détail page 96) se prête à une séance d'homologie indirecte, qui donne lieu à une institutionnalisation des propriétés mathématiques nécessaires à la construction de notre algorithme et des éléments pédagogiques pour les étapes de sa construction.

La cinquième phase est consacrée à la reprise d'exercices de mathématiques donnés à chercher aux étudiants et qui poseraient éventuellement problème, à une extension mathématique de la division euclidienne dans les entiers aux nombres décimaux, aux compléments sur questions des étudiants concernant le thème et après quelques lectures conseillées (livre du maître de certaines collections, chapitres du ERMEL sur le thème).

3. Conclusion

La progression que nous avons choisie pour la division utilise une stratégie d'homologie dominante, avec des éléments de transposition : les étudiants sont confrontés à la résolution de problèmes ou à l'analyse de productions, et la synthèse du formateur se greffe sur les constats qui émanent du groupe, apportant certains notions didactiques utilisées dans la construction des séquences. Compte-tenu des choix stratégiques possibles que nous avions pour la division et du choix sur lequel nous nous sommes décidés, nous considérons donc les stratégies d'homologie comme les plus efficaces, du moins pour ce thème.

On remarquera que les écrits sur la proportionnalité proposent aussi principalement des stratégies d'homologie et de transposition. Si on suppose que les auteurs ont rédigé les situations de formation qu'ils jugent opérationnelles, on peut penser que, pour eux aussi, arrivent en tête homologie et transposition.

Ce qui nous amène aux questions suivantes :

- homologie et transposition seraient-elles privilégiées par les formateurs de mathématiques du premier degré ?
- plus généralement peut-on dégager des stratégies plus employées ?

B. Un survol d'écrits de formation caractéristiques de grandes tendances

Remarquant la diversité de stratégies possibles en comparant deux thèmes, nous avons décidé d'étendre le relevé des stratégies à tous les thèmes mathématiques répertoriés de la formation, et pour ce faire nous nous sommes appuyés sur les publications issues des divers colloques de professeurs d'école normale et sur les documents parus pour la formation des maîtres en didactique, recensant des situations de formation essayées et jugées suffisamment pertinentes pour être communiquées[133].

Notre étude des Actes des colloques s'appuie sur un recensement de textes liés à la formation des maîtres fait par H.Péault dans le document de Pau. Ne sont retenus que ceux qui présentent une situation de formation conséquente. Ils sont là examinés du point de vue de la stratégies sous-jacente.

Précisons qu'on trouve peu d'écrits explicitement sur la formation des maîtres dans les Actes des colloques des Professeurs d'Ecole Normale, dont l'objectif a été pendant longtemps de recenser les travaux faits sur les mathématiques de l'école. Les résultats sur l'enseignement des mathématiques à l'école sont plus importants que ceux sur la formation en mathématiques des futurs maîtres, du moins dans le domaine de l'écrit. Mais les formateurs ont utilisé et se sont communiqué depuis toujours de façon informelle des situations de formation qui renforçaient les connaissances mathématiques et pointaient des faits didactiques, non nécessairement nommés comme tels. La diffusion de la didactique et l'intérêt nouveau que les formateurs en Ecole Normale y ont porté les ont amenés à mieux analyser les éléments qui composaient leurs situations de formation, notamment grâce aux concepts dégagés par les didacticiens.

En examinant les productions des formateurs, nous constatons d'ailleurs que toutes les situations rédigées le sont dans une perspective didactique, même si elles se limitent à une restructuration (fort utile) des connaissances mathématiques. En quelque sorte, l'étiquette didactique a permis la diffusion de situations de formation, même si finalement la didactique

---

[133] Sources :
- recensement par H.Péault dans *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, de Pau 1992 (cf. ci-dessous) des écrits de formation présents dans les actes des colloques jusqu'en 1990 ;
- COPIRELEM (Cahors 1991 et Pau 1992) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 1 et tome 2, IREM de Paris 7 ;
- actes des colloques des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres de 1991, 1992 (Nice et Besançon), 1993 (Aussois), peu exploités car les actes comportent peu de proposition de formation des maîtres ;
- actes de l'université d'été d'Olivet 1988, *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire* , I.R.EM. de Bordeaux.
- une publication de l'I.F.M. de Grenoble de 1987 consacrée à la formation des élèves-instituteurs en didactique.
Il existe quelques autres publications pour la formation des instituteurs, mais à mon avis elles ne donnent pas suffisamment d'éléments pour comprendre quelles stratégies sont associées à la formation proposées : ainsi Pauvert et al.

n'y est pas explicitée, ni comme outil de construction de la séquence de formation (outil implicite), ni comme outil de construction à utiliser pour la classe (didactique explicitée).

Pour chaque thème de notre programme mathématique de formation, nous avons répertorié les stratégies utilisées pour leur exploitation. Cette étude figure en annexe Q (page 326).

En résumé, les thèmes *nombre entier*, *addition*, *soustraction* et *multiplication* relèvent, dans les écrits étudiés, de stratégies de transposition, et quelquefois de stratégies de monstration.

Les thèmes liés à la *géométrie*, la *mesure* et les *fonctions numériques* semblent traités principalement de stratégies d'homologie avec des éléments de transposition.

Le thèmes des *nombres non entiers* relève de stratégies culturelles mathématiques, de transposition et d'homologie.

Le thème *division* a été déjà étudié, il relevait de toutes les stratégies ou presque.

Bien entendu ceci ne décrit l'ensemble des pratiques, mais plutôt celles d'un type de formateurs suffisamment engagés dans la réflexion professionnelle pour rédiger des situations de formation (avec un but non lucratif).

Il est aisé de constater sur cette étude la confirmation de l'existence de différences de traitement stratégique par thème, avec des regroupements stratégiques particuliers.

De plus les trois types de stratégies monstration, homologie, transposition sont toutes représentées[134]. Par contre ces écrits ne font apparaître ni stratégie culturelle, ni autre stratégie.

Cette étude nous permet donc de conclure :

- homologie et transposition ne sont pas les seules stratégies utilisées en formation ;
- il apparaît des associations particulières entre certains thèmes et certaines stratégies ;

et nous conduit à de nouvelles questions :

- pourquoi existe-t-il dans les pratiques des différences stratégiques selon les savoirs ?
- certaines stratégies seraient-elles plus adaptées à certains thèmes ?

On peut émettre l'hypothèse que ces choix sont liés à une idée du formateur sur l'efficacité respective des stratégies, efficacité qui serait relative au thème[135].

---

[134] Ce qui conforte le qualificatif de "stratégies privilégiant la professionnalisation" attribué par A.Kuzniak à ces trois stratégies : ce sont en effet les stratégies dominantes des écrits de "professionnels" de la formation en mathématiques du premier degré.

[135] Précisons à nouveau que la notion d'efficacité étudiée est toute relative : elle reste interne au centre de formation où elle est évaluée et ne représente qu'un pari sur le futur exercice du futur enseignant. Mais si l'efficacité semble optimale à l'intérieur du centre, ce ne peut être qu'un point positif pour une efficacité externe (au centre) et c'est, me semble-t-il une condition nécessaire à cette efficacité externe.

Nous reviendrons sur la finalité de la formation avant de présenter, suite à l'étude précédente et aux réflexions tirées de notre expérience, quelles sont nos hypothèses sur "l'efficacité" relative des stratégies.

C. Un constat : le paradoxe de la formation professionnelle

Que s'agit-il de faire dans une formation professionnelle initiale d'enseignant ?

La formation professionnelle initiale doit certes dispenser des contenus qui se réfèrent à des disciplines, des connaissances didactiques et pédagogiques, contribuer à enrichir des conceptions sur les mathématiques et leur enseignement, mais nous pensons, avec Aline Robert (journée de formation, I.R.E.M. de Paris 7, 1994) qu'elle doit aussi aider le formé à **changer de point de vue sur les mathématiques et leur enseignement** : l'étudiant ne doit plus considérer l'exercice de mathématiques de **son** point de vue, c'est-à-dire savoir s'il est capable de le réussir ou non, mais du point de vue des élèves et de la classe : cet exercice est-il utile pour l'apprentissage qu'il projette avec ses élèves, sous quelle forme, et à quel moment ?[136] Cet objectif, faire changer les étudiants de point de vue, est un objectif à long terme sur tout le temps de la formation.

Mais cette dimension professionnelle de la formation ne peut se fonder que sur des connaissances des différentes disciplines à enseigner les plus solides possibles, car bien entendu, on ne peut enseigner ce que l'on ne maîtrise pas. La formation initiale en mathématiques se doit donc de concilier une remise à niveau mathématique, et des aspects plus professionnels. D'où un **paradoxe de la formation initiale** : les étudiants sont élèves quand il s'agit de les remettre à niveau en mathématiques, ils sont élèves quand ils découvrent sous l'oeil d'un maître les premiers principes de l'enseignement, bref ils sont élèves dans un centre de formation alors que nous devons les amener à penser en maître pour les former professionnellement.

Ce paradoxe est accentué par la place d'un concours en milieu ou fin de formation : en effet pour répondre aux exigences du concours, les étudiants sont amenés à reproduire, plutôt qu'à inventer, les procédures qu'ils jugent les plus efficaces pour réussir, y compris dans l'analyse d'une séquence ou l'expression d'un point de vue sur un exercice, à mémoriser plutôt que reconstruire, etc., ce qui contribue à renforcer leur situation d'élève. Mais le concours actuel teste les étudiants aussi sur des connaissances professionnelles, donc pour lesquelles il faudrait les préparer dès la première année à un changement de point de vue[137].

---

[136] voir aussi l'exposé de Michel Henry dans les Actes du Colloque des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres de Besançon (1992), pages 104-118

[137] En quelque sorte le concours avec le type d'épreuves qu'il préconise, institutionnalise le changement de vue dès la première année, alors qu'avec l'ancien système de formation des écoles normales, ce changement de point de vue était du ressort de la décision du formateur.

Cette difficulté éclaire particulièrement la différence entre la première année et la deuxième année actuelle dans les I.U.F.M., pour les futurs professeurs d'école : la deuxième année les prend libérés des contraintes qu'ils ont à subir comme élèves, enfin presque, puisqu'il reste l'évaluation des modules -mais cette évaluation se réduit souvent à une formalité- et des stages -mais c'est une évaluation du côté de la pratique, donc plus acceptée- ; les étudiants peuvent se sentir enfin apprentis-maîtres et se consacrer à leur formation. Nous sommes un certain nombre de formateurs à trouver qu'ils ont "oublié" les connaissances pédagogiques et didactiques dont ils ont pourtant montré la disponibilité aux épreuves du concours. Il se pourrait donc que ces connaissances aient été stockées, si nous osons cette image, du "côté élèves de leur cerveau", et qu'elles ne puissent être immédiatement disponibles "du côté maître". D'où la difficulté de la deuxième année de formation : les formateurs souhaiteraient la continuité de la formation de la première année et les étudiants imaginent une rupture qu'ils ne retrouvent pas dans la formation, puisque les formateurs l'ont intégré à la première année, soit par choix (cas des ex écoles normales), soit par obligation (préparation au concours).

Ce problème était moins sensible du temps des écoles normales, puisque le concours en début de formation permettait de limiter le "bachotage" pendant la formation, mais le paradoxe[138] existait déjà, du fait du faible niveau mathématique de la majorité des candidats : il s'agissait de leur faire faire beaucoup de mathématiques, ce qui était encore possible en première année, beaucoup plus difficile en seconde, par la présence des stages en responsabilité.

Par contre la formation continue échappe à ce paradoxe ; ou toute formation s'adressant à des étudiants ayant déjà eu sur un temps assez long la responsabilité d'une classe comme maître. Le changement de point de vue est déjà amorcé ou établi. En revanche le formateur ne doit pas "se tromper de côté" : les instituteurs n'apprécient guère les entrées en termes disciplinaires, même si, grâce à des entrées pédagogiques, le formateur réussit à leur faire faire "plein de mathématiques", dont ils ont quelquefois grand besoin.

D. Nos hypothèses sur l'efficacité des stratégies

Il ne s'agit là que de présentations d'hypothèses sur l'efficacité des stratégies dans la mesure où aucune validation à l'échelle de la pratique de classe des étudiants n'a été mise en place.

[138] paradoxe pour tous les formateurs, dont nous sommes, qui avaient décidé de rentrer "dans le vif de la formation professionnelle" la première année : en effet la nécessité d'un temps long de maturation, la justification de la nécessité de mathématiques supplémentaires à celles classiquement associées à un thème, le désir de répondre à leurs attentes d'immersion rapide dans les réflexions du milieu professionnel nous ont toujours fait opter pour ce choix. Le savoir sur les pratiques professionnelles n'était cependant pas institutionnalisé la première année. Ainsi la répartition des coefficients liés aux mathématiques et à la didactique dans les devoirs évoluait au fil de l'avancée dans la formation au profit de la didactique et de la réflexion sur la pratique de classe.

Cette efficacité est plutôt mesurée par le formateur, mais étayée par les bilans terminaux des étudiants, par un certain équilibre entre le confort du formateur et les attentes des étudiants, compte-tenu de la conception du formateur de la formation professionnelle.

1. Les stratégies d'homologie

Les stratégies d'homologie mettent en scène le triplet Maître-Classe-Savoir comme le formateur souhaite qu'il fonctionne dans une classe de l'école élémentaire, c'est-à-dire avec un objectif d'apprentissage de mathématiques pour ses étudiants et une sensibilisation à la méthodologie de l'enseignement. Le formateur peut donc simultanément travailler des mathématiques avec les étudiants et confronter ces étudiants à un enseignement de ces mathématiques. D'où deux avantages sur les autres stratégies.

- D'une part, les stratégies d'homologie permettent de distinguer sur le même problème mathématique (quand il s'agit d'homologie mathématique) les deux points de vue (celui de l'élève et celui du maître), que les étudiants sont conduits à avoir dans la formation : le formateur peut conduire la situation de manière à conclure sur des savoirs mathématiques pour ses étudiants, les considérant alors comme élèves, puis, par un effet de distanciation, les sensibiliser à l'approche du maître, en l'occurrence la sienne, en explicitant ses choix et son bilan sur la situation de formation qu'il a construite. L'homologie s'agrémente alors de façon plus ou moins forte de transposition. L'homologie facilite ainsi la prise en compte de la notion de point de vue, ce qui nous apparaît capital dans la formation.

- D'autre part, l'homologie peut permettre (surtout s'il s'agit d'homologie de type direct) un transfert possible à la classe élémentaire sans beaucoup d'adaptation (A.Kuzniak nous met toutefois en garde devant la dénaturation simplificatrice) ; et cette apparente proximité du quotidien du maître est importante pour la crédibilité du formateur. En effet celui-ci doit faire face, en quelque sorte, à la concurrence des maîtres en exercice, dans la classe desquels l'étudiant voit des leçons de mathématiques se faire et des enfants travailler, pas toujours dans l'optique conseillée par le formateur. Le formateur utilise donc le subterfuge d'une stratégie d'homologie pour montrer à ses étudiants une classe au travail selon les modalités qu'il a choisies. L'homologie permet donc de concurrencer le terrain.

Cet effet concurrentiel peut en partie expliquer que les stratégies d'homologie appartiennent à une certaine tradition des formateurs du premier degré, indépendamment de la discipline enseignée[139]. En effet ceux-ci ont eu progressivement à enseigner la pédagogie spécifique de la discipline, sans avoir la possibilité répétée de montrer des leçons-modèles. En l'absence d'un corpus constitué de savoirs pédagogiques et didactiques et dans la mesure où il s'agissait de viser un enrichissement des pratiques sur le savoir faire d'enseignement, ces formateurs ont utilisé l'homologie : ils faisaient la classe comme ils souhaitaient que leurs

---

[139] cf. Develay M, *Peut-on former les enseignants ?*, 1994, Ed ESF, Collection Pédagogies, Paris.

étudiants la fassent à leurs élèves, en espérant un transfert par imitation sans nécessairement que ces étudiants en voient toutes les subtilités (sans encore d'effet de transposition).

Cependant il nous semble que certaines conditions d'application rendent plus efficaces les stratégies d'homologie. Elles présentent le risque d'infantiliser l'étudiant si elles sont en deçà de son niveau de connaissance. Elles sont, à notre avis, plus efficaces sur des étudiants mauvais en mathématiques ou même bloqués, à condition qu'elles permettent de les remettre à niveau ou de les assurer dans cette matière. C'est le pari que doit réussir le formateur, pour convaincre ses étudiants de la pertinence de la méthodologie employée, au moins pour des réapprentissages ; et c'est un pari qui nous paraît raisonnable, car les diverses promotions que nous avons eu à former toutes ces dernières années étaient faibles scientifiquement (quelquefois même bien trop !). L'étudiant bon en mathématiques est peut-être moins convaincu par cette démarche, sauf s'il s'engage dans l'observation de ses camarades qui cherchent, ou est confronté à une recherche ou à un résultat non classique, par comparaison avec ses études antérieures.

En résumé, les stratégies d'homologie s'appuient sur une dialectique entre point de vue élève et point de vue enseignant. La "part de transposition" peut augmenter au fur et à mesure de la réceptivité des étudiants aux savoirs professionnels, autrement dit à leur capacité à "penser en maître". Associées à des savoirs méconnus des étudiants, elles permettent des effets contrôlables à l'intérieur du centre de formation (l'étudiant voit ses connaissances mathématiques évoluer), tout en montrant une méthodologie de l'enseignement conseillée. Elles simulent des effets de classe, si les étudiants ne vont pas dans une classe élémentaire.

2. Les stratégies culturelles

Les stratégies **culturelles mathématiques** ont elles aussi des effets contrôlables (par des évaluations à l'intérieur du centre de formation) ; mais elles ne s'intéressent qu'aux savoirs disciplinaires et surtout ne permettent pas de voir en acte la méthodologie d'enseignement conseillée. Elles renforcent le formé dans sa position d'élève et reproduisent des stratégies qui ont bien souvent échoué sur un certain nombre d'étudiants se destinant au métier d'enseignant en école. Elles ne participent pas au changement de point de vue.

Nous avons utilisé aussi le qualificatif de stratégies culturelles pour des savoirs pédagogiques. Le contrôle des connaissances pédagogiques est difficilement possible à l'intérieur du centre de formation (on ne peut faire apprécier à l'étudiant ses progrès pédagogiques en dehors d'une classe où il exerce), et ces stratégies ne participent pas non plus au changement de point de vue puisqu'elles placent l'étudiant directement du côté maître. De plus, il n'existe pas de consensus des acteurs de l'enseignement (inspecteurs, instituteurs, etc.) sur des savoirs pédagogiques. Pour certains étudiants (par exemple ceux qui ont un parent instituteur), les connaissances transmises peuvent sembler relever de l'idéologie, quand elles sont présentées détachées de leur contexte. Ces stratégies ne nous semblent d'ailleurs efficaces que si elles sont suivies d'une analyse justifiant la pertinence de la progression retenue, donc pointant nécessairement à cette occasion des outils didactiques, et faisant évoluer cette stratégie vers la transposition.

3. Les stratégies de transposition

Les stratégies de transposition explicitent les outils de l'acte d'enseigner. Contrairement aux stratégies d'homologie, elles se placent complètement du point de vue du maître. Elles amènent les étudiants à réfléchir sur la pratique, pas encore sur la leur, mais sur celle du formateur, par exemple si la transposition est précédée d'homologie, ou sur celle d'autres instituteurs, et à prendre connaissance d'outils d'ingénierie didactique. Les approches liées à l'homologie (dans une perpective constructiviste) suivies de transposition ont l'avantage d'amener à se confronter à l'opinion d'autrui (celles des autres étudiants, du formateur), donc de tester des résistances qu'elles soient sur des savoirs disciplinaires ou liés à la classe ; elles arment donc davantage les étudiants face aux résistances du terrain. Elles permettent également de leur proposer des outils de la didactique qui ont pris du sens dans les situations qu'ils ont vécues. Là une "phase" de transposition joue le rôle d'une institutionnalisation de didactique.

Une stratégie de transposition menée sans homologie préalable, qu'elles soit directe ou indirecte ou action, nécessite de faire appel à une connaissance de la classe primaire sur laquelle il est possible de faire fonctionner cette transposition. Elle ne peut donc être efficace, à notre avis, qu'en fin de formation ou en formation continue.

4. Les stratégies de monstration

Les stratégies de monstration ne prennent en compte elles aussi que le point de vue de l'enseignant.

Elles nous semblent répondre à deux finalités :

- menées sur un long terme, comme par exemple à l'école Michelet à Bordeaux, avec des conditions d'observation de classe bien définies, elles peuvent, en se doublant d'éléments de transposition, constituer la dominante de la formation et s'adresser à des plus expérimentés comme à des novices (sur la connaissance des classes élémentaires) ;
- quand elles ne peuvent être continuées sur un long terme, avec des conditions spécifiques, elles apparaissent plutôt comme un moyen d'illustrer les apports du formateur, en quelque sorte de valider par l'observation les affirmations du formateur et les références invoquées. En effet :
    - les étudiants sans expérience du terrain sont étonnés des compétences cognitives que les formateurs prêtent aux élèves ; ils ont tendance à "croire" s'ils voient ;

- les étudiants qui reviennent de stages dans les classes dans lesquelles ils ont vu fonctionner des progressions en contradiction avec les conseils de la formation et qui ont discuté avec les maîtres de cette distorsion se sont entendu dire que la formation restait trop ambitieuse et trop théorique et que les élèves étaient souvent incapables de faire des recherches, etc. ; l'observation d'une séance de recherche dans une classe peut les aider à relativiser cette opinion.

La formation dispensée dans le centre nécessite quelquefois, pour prouver en acte la pertinence de ses déclarations, de les montrer en application dans une classe et d'analyser cette séance de classe en grandeur réelle[140]. Ainsi une séance effectivement menée dans les classes selon les principes avancés a souvent sur les étudiants beaucoup plus d'impact à long terme que des discours même non dogmatiques, surtout si elle est suivie d'une analyse fine.

5. Conclusion sur nos hypothèses

Considérant l'objectif de changement de point de vue lié à la formation professionnelle, il nous semble donc que les stratégies privilégiant ce changement de point de vue, en l'occurrence les stratégies d'homologie, sont les plus adaptées pour débuter la formation de novices. La transposition et la monstration, s'intéressant davantage au point de vue maître, se grefferont plutôt dans une deuxième phase, ou après un certain niveau de connaissance du milieu d'exercice. Elles seraient donc globalement plus adaptées à des étudiants en deuxième année ou revenant d'un long séjour sur le terrain ou à des maîtres en formation continue. La monstration sous sa forme la plus usuellement pratiquée serait plus une illustration (donc une information supplémentaire) qu'une formation.

Ainsi l'homologie serait particulièrement bien adaptée à la première année. Cependant l'examen des différents savoirs mathématiques de la formation montre que des stratégies d'homologie ne semblent pas toujours applicables, plus exactement l'absence de telles stratégies pour certains savoirs dans les écrits de formation consultés nous amènent à cette hypothèse.

D'autre part nous avons aussi émis certaines hypothèses sur certaines conditions mathématiques d'application des stratégies : une stratégie d'homologie serait plus adaptée à un savoir méconnu tandis que stratégies de monstration ou de transposition s'appliqueraient plutôt à des savoirs bien connus des étudiants.

Dans le chapitre qui suit, nous illustrons notre vision d'un traitement homologique d'un thème en présentant la progression que nous avons suivie avec une promotion de futurs professeurs d'école, leur première année de formation.

---

[140] Le formateur ne considère pas cette exhibition d'un fonctionnement de classe comme une preuve de la pertinence de ses affirmations, mais il sait que les étudiants sont sensibles à l'exemple (même unique).

Une progression en vraie grandeur : les aires et leur mesure

Comme nous en avons pris l'habitude avec les thèmes déjà étudiés, nous précisons d'abord les différents points, ici en relation avec les grandeurs, sur lesquels il nous semble important que les étudiants aient des connaissances : nous faisons l'hypothèse que la conjonction de ces connaissances leur donnera une vision des grandeurs propice à un enseignement correct. Nous proposons donc une définition d'un savoir de formation sur la mesure.

Puis nous constatons le peu de publications concernant la formation des maîtres sur les grandeurs , tourné plus particulièrement vers la mesure des aires.

Enfin, nous développons notre progression sur la mesure, en précisant nos choix didactiques et les conséquences à court terme que nous avons pu vérifier sur les étudiants.

I. Proposition d'un savoir de formation sur la mesure

Nous présentons ci-après une mise à plat des points qui nous semblent constitutifs des savoirs nécessaires au maître sur le thème étudié[141]. Rappelons que ce découpage ne correspond ni à une chronologie des séances a priori, ni à des titres de séance et que les contraintes diverses ne nous permettent pas toujours de traiter aussi profondément que nous le souhaiterions tous les points mentionnés. Nous envisageons un regroupement de ces points en trois rubriques.

1 - La mesure comme savoir

Cette partie regroupe tous les savoirs liés à la notion de grandeur : la distinction entre objet physique, objet mathématique, grandeur associée à un objet mathématique ; l'existence des grandeurs mesurables et des grandeurs repérables : dans la première catégorie, figurent longueur, aire, volume, capacité, masse, durée, et dans la seconde, temps et température, dans une troisième, angles[142].

Elle comprend aussi tout le savoir lié à la mesure :

- définition d'une mesure, lien avec les nombres réels, rôle des nombres décimaux, le système métrique;
- quelle est l'épistémologie de la mesure :
    - le nombre entier comme première mesure naturelle.

[141] mise à plat que nous avons pris l'habitude de faire avant de construire la progression suivie en formation pour tout thème.

[142] En effet les angles semblent se comporter comme des grandeurs mesurables, mais seulement modulo 2π.

- la mesure comme génératrice du nombre, source de problèmes théoriques fondamentaux dans l'histoire des mathématiques.

- unités et changements d'unités ; lien avec la proportionnalité.

S'y ajoutent notamment les savoirs spécifiques à certaines grandeurs, les mesures ou les repères : longueur du cercle, formulaire sur les aires et les volumes, calendriers.

Cette partie contient aussi le savoir plus spécifiquement nécessaire à l'enseignement du thème : notion de dimensionnalité, de bidimensionnalité, de tridimensionnalité ; relations entre longueur, aire et volume, notamment dans les changements d'échelle ; l'évolution de l'enseignement de la mesure ; et les notions didactiques suivantes, que la mesure permet d'illustrer :

- le statut outil-objet du savoir ; son rôle dans la construction des connaissances ;
- le rôle des institutionnalisations locales pour construire le sens de la mesure des aires ;
- les changements de cadre ;
- des exemples de variables didactiques : papier blanc, papier quadrillé pour l'estimation de la mesure des aires.

Un cas particulier de grandeur peut être étudié : les aires de surfaces planes et leur mesure ; les propriétés (notamment l'additivité et l'invariance par isométrie)..

2 - Savoirs sur la mesure du côté des élèves

Cette partie regroupe les savoirs plus spécifiquement didactiques que nous possédons actuellement sur le thème et ceux que le thème permet particulièrement d'illustrer, mais vus du côté des élèves. C'est sur la grandeur aire que ces résultats nous semblent le plus consistants.

- Des exemples d'erreurs typiques d'élèves, par exemple sur les aires (cf. thèse de M.J.Perrin[143]) :
    - prégnance de la forme de la surface pour en déduire une aire (surface unité carré ne peut paver une surface triangulaire) ;
    - amalgame entre les différentes grandeurs attachées à une surface (aire et périmètre) ;
    - proportionnalité implicite entre longueurs et aires (pour les élèves, les dimensions d'un rectangle multipliées par K ne transforment pas l'aire multipliée par K^2).
- Les hypothèses didactiques de la recherche sur l'enseignement de l'aire :

    HYPOTHESE 1 : développer dans l'enseignement le concept d'aire en tant que grandeur permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les cadres numérique et géométrique ;

---

143 Perrin-Glorian M.J.(1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*, Thèse de doctorat d'état, Université de Paris 7.

HYPOTHESE 2 : une identification trop précoce entre grandeurs et nombres conforte l'amalgame des différentes grandeurs longueurs et aires ;

HYPOTHESE 3 : des interactions sont nécessaires entre points de vue d'une part "statique" (découpage-recollement) et "dynamique" (déformation), d'autre part "papier uni" et "papier quadrillé" (comme supports de dessin).

3 - Savoirs didactiques du côté du maître

Cette dernière partie regroupe les synthèses qui nous semblent utiles pour une intégration des connaissances précédentes dans la pratique du maître.

- Rôle du maître dans les jeux de cadres
- Exemples de situations fondamentales sur l'aire ; liaison avec situations fondamentales introduisant les nombres non entiers.
- Exemples de progressions sur chaque grandeur ou sur quelques-unes; d'exercices d'entraînement et de réinvestissement.
- Analyse de manuels, notamment sur les aires.
- Etude des tests d'évaluation nationale, des livrets sur les compétences.

Voilà donc l'ensemble des points qui, nous semble-t-il, constituent les savoirs de formation sur le thème grandeurs et mesure.

S'il existe un certain nombre d'écrits sur la mesure à l'école, en revanche peu d'écrits traitent de la mesure en formation d'enseignants :

- l'article de M.J.Perrin en 1987[144], mais il s'agit davantage d'un compte-rendu sur la mesure à l'école, plutôt que sur la mesure à l'école normale ;
- les deux articles de M.C.Chevalier en 1991 dans le document de la COPIRELEM[145], pages 15 à 17 et pages 27-28, sur les aires ;
- notre article en 1992 dans la suite du document précédent, sur les aires ;
- le chapitre "Grandeur et mesure", pages 111 à 157 du tome 2 *Se former pour enseigner les mathématiques* de Dubois et al, éditions A.Colin (1993).

Cette vision d'ensemble des savoirs de formation étant précisée, nous allons développer nos choix, compte tenu du type de public et des contraintes, et exposer le détail de notre progression.

---

144 Perrin-Glorian M.J. (1987) "Réflexion a priori sur la formation des maîtres à l'enseignement de la mesure", pages 121-130, *Actes du colloque d'Angers*, IREM D'Angers.

145 COPIRELEM (Cahors 1991) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 1, IREM de Paris 7.

II. Le cadre de la progression

A. Etat des étudiants a priori

Les connaissances mathématiques sur les grandeurs sont relativement homogènes sur l'ensemble des promotions que nous avons reçues pour la formation ; elles sont de diverses natures selon la grandeur examinée : pas de difficulté particulière sur les longueurs, ni sur les masses, ni le temps et les durées (à part quelques problèmes calculatoires), d'utilisation relativement courante (au sens où la pratique quotidienne a permis de compléter leurs connaissances sur ces thèmes), des manques et des erreurs plus importants sur les aires et les volumes, correspondant à l'opposition des caractères unidimensionnels de chacune de ces grandeurs et de leurs aspects pluridimensionnels quand elles sont mises en relation avec la longueur. Il paraît donc important de combler les lacunes mathématiques des étudiants sur ces deux grandeurs mesurables, tout en préparant à l'enseignement de la mesure en général à l'école.

Nous choisissons donc de traiter de la mesure des aires de surfaces planes, parce qu'elle se prête sans grande nécessité de matériel à des séances d'homologie directe.

Nous présentons la progression à laquelle nous avons soumis une promotion d'étudiants de première année d'I.U.F.M. pendant l'année scolaire 1993-94. Ils ont déjà reçu des enseignements sur de la géométrie (en dimension 2 et 3), les fonctions numériques, la division et un peu la multiplication, thèmes qui font partie de leur programme de concours local.

Ces séances occupent les huit dernières heures d'une de leurs deux plages hebdomadaires de deux heures. Elles clôturent leur formation mathématique de première année, dont nous assurons la moitié des enseignements, c'est-à-dire une plage hebdomadaire, l'autre plage étant sous la responsabilité d'un collègue, selon un découpage des thèmes décidé en début d'année.

Nous n'avons pas soumis les étudiants à une pré-évaluation sur la mesure. En effet, les essais antérieurs de pré-évaluation ne nous avaient pas du tout donné satisfaction : d'une part, ils avaient confronté plus encore les étudiants à leurs manques en la matière, d'autre part ils avaient conduit à renforcer le blocage que faisaient certains sur les mathématiques, dans la mesure où ces pré-tests ne faisaient que constater ce que les étudiants savaient déjà : leur besoin de refaire des mathématiques pour les enseigner (et même des exercices de CM !). Nous ne nous appuyons donc pas sur un point zéro classique. Par contre le type de questionnaire sur leurs idées a priori sur un thème et l'interaction que permettent les stratégies d'homologie que nous employons principalement nous donnent, à notre avis, plus de renseignements sur l'état de leurs connaissances et la réceptivité que nous sommes en droit d'attendre sur telle ou telle question. De plus le bilan que nous présentons à la fin de la progression montre que celle-ci a permis pour presque tous les étudiants un enrichissement des connaissances mathématiques et didactiques.

B. Les choix didactiques que nous faisons pour l'enseignement de la mesure en formation

Nous décidons de traiter avec les étudiants le plus finement possible les aires de surfaces planes et leur mesure comme exemple d'une grandeur, et d'une grandeur mesurable, considérant que :

- nous n'avons pas le temps matériel de traiter de toutes les mesures en formation,
- les enseignements des grandeurs nous semblent présenter plus d'analogies que de différences,
- le traitement en détail d'une grandeur et le pointage des différences avec les autres grandeurs est plus efficace que le survol de toutes les grandeurs.

Nous rappelons qu'une de nos hypothèses didactiques sur les stratégies est de considérer l'homologie comme "plus efficace" notamment pour les savoirs "mal acquis" par les étudiants, parce que ce type de stratégies nous permet d'observer et de réguler les connaissances mathématiques de nos étudiants et, simultanément de leur proposer une démarche d'enseignement, presque "grandeur nature" sur le thème. Nous cherchons donc à mettre en place, de manière dominante, une telle stratégie sur ce thème. Plus précisément les séances que nous faisons avec les étudiants suivent les grandes lignes de la progression que nous conseillons avec les élèves, et nous incluons des situations de formation homologues de celles de l'école.

C. Contraintes temporelles et institutionnelles

Compte tenu du découpage horaire qui a été retenu cette année 93-94, le temps imparti est de 4 à 5 séances de deux heures chacune, pour la préparation simultanée de la première année professionnelle et du concours. Toutefois la progression retenue en formation sur le thème de la mesure cette année n'est pas fondamentalement différente de celle pratiquée avec les étudiants qui ne sont pas soumis à un concours (à condition qu'elle se situe après un certain temps de formation initiale et de connaissance du terrain), dans la mesure où se retrouve la nécessité de faire progresser les étudiants à la fois mathématiquement et didactiquement sur ce thème. La contrainte de temps nous a empêchés de traiter cette année la séance d'analyse de manuels.

D. Intentions pédagogiques de la progression

1- Amener les étudiants à donner du sens aux mots grandeur et mesure d'une grandeur, en les attachant à une grandeur particulière, l'aire. Relier grandeurs et nombres non entiers.

2- Rendre les étudiants aptes à la résolution de problèmes relevant de l'aire et de sa mesure.

3- Rendre les étudiants critiques face à une progression sur l'aire et sa mesure (en confrontant cette progression aux hypothèses de la recherche) et prêts à proposer des adaptations éventuelles à des propositions de progression incomplètes.
4- Préparer les étudiants à transférer les principes de cette démarche d'enseignement sur d'autres grandeurs mesurables : longueur, masse, volume...
5- Pointer dans les propositions didactiques les outils didactiques utilisés et profiter de la mise en situation des étudiants pour acquérir du savoir sur les aires pour en quelque sorte "prouver" leur pertinence.

Analysons ces intentions

Les deux premières intentions sont homologues de celles qu'il est licite d'avoir pour des élèves de cours moyen, puisqu'elles concernent plus spécifiquement du savoir mathématique mal maîtrisé de nos étudiants. Elles jouent un grand rôle dans la décision d'utiliser plutôt une stratégie d'homologie pour le travail sur ce thème, considérant l'homologie comme la stratégie la plus adaptée à restructurer les connaissances mathématiques de l'étudiant tout en livrant une méthodologie (efficace localement sur lui) qu'on souhaiterait lui voir appliquer dans une classe élémentaire.

E. Quelques remarques concernant les premières situations

L'ensemble de la progression et surtout les premières séances ne nous semblent efficaces pour leurs apports de méthodologie de l'enseignement qu'à certaines conditions réunies pour les promotions dont nous parlons.

- Qu'elles aient une connaissance minimum de la classe (au sens où les étudiants ont observé des séquences faites par des maîtres titulaires et effectué des séquences eux-mêmes), ce qui leur permet d'avoir pris conscience des nécessités de donner du temps aux élèves pour chercher, de prévoir une organisation relativement stricte du matériel et des supports d'exposition, de comprendre l'importance des synthèses et des fins de séances intermédiaires, de prévoir du travail supplémentaire pour ceux qui ont fini plus tôt, bref d'avoir une certaine sensibilité à l'importance des détails de gestion.
- Qu'ils aient déjà eu une certaine durée de formation mathématique, où ils aient été amenés à confronter leurs conceptions des mathématiques et de leur enseignement à celles des formateurs (professeurs et maîtres formateurs).

Bref qu'ils ne soient pas vierges de réflexion sur les mathématiques et leur enseignement, ni totalement ignorants de certaines contraintes du "terrain".

En résumé une telle progression nous paraît nettement moins efficace au tout début de la formation.

Pourquoi ces remarques

L'état des étudiants nous invite à envisager une stratégie d'homologie, nos recherches nous permettent d'utiliser une situation d'homologie que nous pouvons qualifier de directe, puisque nous avons construit et fait fonctionné cette situation dans des classes de CM1, où elle nous semble pertinente. Mais cette situation, relativement riche, peut être prétexte à diverses exploitations et on y rencontre de nombreuses notions mathématiques simultanément : aires et leur mesure, symétrie axiale, fractions et égalités de fractions, qu'il sera nécessaire de pointer avec les étudiants. Cette richesse peut tout au début de formation leur apparaître comme d'une énorme complexité de gestion, ce qui risque d'entraîner une "dénaturation simplificatrice" au sens d'A.Kuzniak s'ils l'utilisent en classe.

Il nous semble donc souhaitable que le formateur, avant de proposer cette situation, ait eu l'occasion, au travers d'autres situations de formation et de réflexions sur l'enseignement, de préciser sa conception des mathématiques et certaines hypothèses sur leur apprentissage et leur enseignement, pour que la progression soit plus efficace.[146]

Le cadre ayant été défini, voici page suivante le plan général de la progression.

Précisons que les séances sont hebdomadaires, ont toujours lieu le même jour de la semaine à la même heure. Une semaine sépare donc deux séances consécutives, sauf si s'intercalent des congés, ou des stages en tutelle pendant lesquels l'étudiant est intégré dans une classe élémentaire.

[146] C'est, entre autres, l'impact différent ressenti sur les étudiants débutants la seule fois où nous l'avons utilisée en relative début de formation qui nous fait écrire cet avertissement.

III. Plan général de la progression

Etape	Thème	Stratégie	Prévision temps/ séance
Etape 1	Construction de la grandeur aire, par fabrication de surfaces de même aire, matérialisées par des morceaux de papier. Rangement des surfaces selon l'aire.	Homologie directe, avec éléments de transposition.	2 heures Séance 1
Etape 2	Passage à la mesure sur les classes d'équivalence définies précédemment et représentées par des surfaces. Notion d'étalon et d'unité. Introduction du codage fractionnaire.	Culturelle pédagogique (la suite des activités est racontée)	
Etape 3	Comparaison d'aires de surfaces ou de classes de surfaces : - transformation conservant l'aire permettent de comparer des surfaces de formes plus comparables ; - utilisation d'un pavage commun aux deux surfaces à comparer : réinvestissement de l'étalon. Différentiation aire-périmètre.	Homologie indirecte, avec éléments de transposition.	2 heures Séance 2
Etape 4	Les unités conventionnelles d'aire. Le système international des poids et mesures.	Culturelle pédagogique et sociale	
Etape 5	Construction d'un formulaire sur les aires des triangles et quadrilatères usuels. Le cas du disque.	Homologie indirecte (ou directe concentrée)	2 heures Séance 3
Etape 6	Réinvestissement mathématique :exercices sur les aires, le théorème de Pythagore, les égalités remarquables, un exemple de changement de cadre, l'importance historique du cadre de la mesure des aires, de la mesure en général.	Culturelle mathématique Transposition	2 heures Séance 4
Etape 7	Analyse didactique globale de la progression, éléments sur grandeurs mesurables et repérables, compléments sur volumes.	Transposition	
Etape 8	Réinvestissement didactique : étude comparée de premières leçons sur les aires.	Transposition	2 heures Séance 5

IV. Première séance

A. Objectifs

-Objectifs mathématiques

- construire le concept d'aire
- comparer des aires de surfaces sans recourir à la mesure
- construire la mesure ; différencier grandeur et mesure

-Objectifs didactiques

- différencier les statuts outil et objet des savoirs mathématiques et leur rôle dans l'apprentissage (cas de la symétrie centrale) ;
- comprendre l'apprentissage d'une notion comme résolution d'un problème dont les contraintes rendent nécessaires (les nombres non entiers) ou opportunes (la grandeur aire) la notion ;
- proposer au vécu et à l'analyse des exemples de situations d'enseignement relativement à l'enseignement de l'aire et des fractions.

B. Choix de la situation

Elle a été mise au point pour la formation[147], et peut aussi fonctionner dans des classes de CM[148] (en partie) et en formation professionnelle. Elle se place après un certain temps de formation, peut-être même en conclusion d'un certain temps de formation.

La tâche liée à la situation est la production de surfaces de même aire,
- d'abord par la recherche d'une ligne de partage qui partage un rectangle fixé en deux surfaces isométriques d'aire égale à la moitié de celle du rectangle : ce qui permet de proposer deux définitions de "avoir même aire" : deux surfaces ont même aire si elles sont exactement superposables ; deux surfaces ont même aire si elles représentent la même quantité de papier (sans avoir la même forme) ;
- puis par des découpages et des recollements...licites.

Nous allons préciser ses avantages à nos yeux.

1 - Sur sa pertinence professionnelle

Nous avons eu l'occasion de la mettre en place dans des classes de CM, où donc nous avons relevé des éléments qui confortaient a fortiori notre analyse a priori. Les expérimentations successives nous ont aussi permis de constater des analogies entre les stratégies et les

---

[147] C.Houdement, M.L Peltier,(1992), *La Boîte du Pâtissier*, pp 45-52, IREM de Rouen
ou C.Houdement, M.LPeltier, "Aires de surfaces planes", pp59-64, in *Documents pour la formation en mathématiques*, COPIRELEM (1992),IREM de Bordeaux

[148] C.Houdement, M.LPeltier (1994), *La machine à partager. Fractions et décimaux au CM*, pages 25 à 45, IREM de Rouen.

productions des classes élémentaires et celles d'adultes en formation, globalement non scientifiques.
Les productions des élèves ont été certaines années montrées aux stagiaires pour les convaincre de la faisabilité de la situation (utilisation en quelque sorte d'un effet de monstration).

Remarque sur l'importance du public

La même situation menée en formation continue de professeurs de mathématiques de collège, pourtant prêts à se mettre à la tâche, comme point de départ à une réflexion sur l'activité mathématique, n'a été aussi efficace pour une réflexion sur les mathématiques et leur enseignement, en partie parce que certains ont préféré "sécher" plutôt que d'employer des procédures manipulatoires d'élèves : ils n'ont pu faire une analyse a priori convaincante.

2 - Sur la conception des mathématiques et de la recherche

Elle offre, nous semble-t-il, les caractéristiques d'une situation de recherche : l'élève peut s'engager dans le problème, ses connaissances sont insuffisantes pour qu'il trouve immédiatement toutes les solutions, il peut lui-même valider ou invalider ses propositions. La résolution du problème lui permet :

- d'utiliser en acte, comme outil de résolution, la notion de symétrie centrale[5] (plus précisément celle d'invariance par symétrie centrale pour une courbe) ;
- de classer des surfaces selon un critère à détacher du sensible : le maître institutionnalise le critère de classement sous le nom d'aire.

La recherche elle-même nous semble consistante sur le plan du raisonnement, mais c'est le processus constitutif du produit de la recherche qui constitue l'objectif d'apprentissage du maître (ou du formateur). Il y a place à l'imagination, les élèves cherchant à produire des surfaces de formes très différentes ou très sophistiquées.

3 - Sur le statut des connaissances mathématiques

- La notion de symétrie centrale[149] apparaît comme outil dans cette recherche, outil dont il n'est pas nécessaire de connaître le nom, ni les caractéristiques, pour le rendre localement et dynamiquement opérationnel.
- La grandeur aire est caractérisée comme **critère commun** à des objets différents pour nos sens (pas nécessairement de même forme, quelquefois même de formes très "éloignées") ; elle **se définit** (autre exemple d'une définition que celle habituellement connue) par la relation

---

[149] En effet les deux surfaces à construire étant isométriques et leur juxtaposition constituant le rectangle, l'isométrie les transformant l'une en l'autre conserve le rectangle : elle est donc soit symétrie axiale par rapport à une médiane du rectangle (droite joignant les milieux des côtés opposés), soit symétrie centrale par rapport au centre du rectangle (point de rencontre des diagonales). La ligne de partage doit être aussi globalement invariante par l'isométrie qui transforme la première surface en la deuxième, elle doit donc être une médiane du rectangle ou une courbe passant par le centre du rectangle et admettant ce centre comme centre de symétrie. Une courbe passant par le centre et admettant le centre du rectangle comme centre de symétrie convient donc.

"avoir même aire" ; la différentiation entre classe et élément d'une classe se visualise, la notion de représentant d'une classe (pour le critère aire) prend du sens.
Le formateur peut pointer les différences entre les **objets physiques** (les feuilles de bottin avec leur épaisseur), les **objets mathématiques** qui les modélisent dans la situation (les surfaces, parties bornées du plan), la **grandeur** (ici l'aire définie par les classes de surfaces de même aire) et la **mesure** (l'application entre une classe de surfaces de même aire et l'ensemble des nombres réels), qui n'est pas utile dans un premier temps.
C'est l'occasion d'illustrer les notions piagétiennes de classement-sériation, dont nos étudiants n'ont pas manqué d'entendre parler dans d'autres cours.
- Les fractions sont introduites dans la nécessité (provoquée par les contraintes de la situation) d'utiliser de nouvelles écritures (dont le maître est garant culturellement). Ce codage reste proche des actions sur les objets, ce qui contribue à leur donner du sens.

4 - Sur la pertinence des outils didactiques

- Les notions de phases d'une recherche (action, formulation, validation, réinvestissement) peuvent être éclairées par l'explicitation a posteriori du déroulement choisi par le formateur. Le rôle de chacune peut ainsi être précisé.
- Le statut outil de la connaissance symétrie centrale peut être particulièrement illustré par cette situation ; les fractions apparaissent elles aussi comme outils de codage des nouvelles classes. C'est l'occasion de préciser le concept de dialectique outil-objet et son rôle dans le fonctionnement des connaissances.
- La non linéarité possible des stratégies d'enseignement peut aussi être pointée ici : le fait que cette situation permette simultanément de pointer d'autres savoirs que la grandeur visée (en l'occurrence symétrie centrale et nombres rationnels) n'est pas perturbatrice dans le déroulement prévu par le formateur. La non linéarité peut être organisée par la mise en situation. C'est un exemple de sensibilisation parallèle sur des thèmes qui s'éloignent de l'objectif principal.
- La notion de conception a priori, le retour des conceptions d'origine en cas de déstabilisation : les étudiants, comme les élèves, constatent la contradiction entre leur appréhension sensible de l'aire et l'étude raisonnée : des surfaces de formes différentes n'ont pas la même aire, des surfaces de même aire ont le même périmètre. A tout moment, du moins au début, ils se sentent soumis à l'attirance du sensible. Ce qui permet de rappeler l'importance de la prise en compte des conceptions des apprenants pour les intégrer au maximum dans le projet d'apprentissage.

C. Organisation de la séance

Matériel

Feuilles entières (format A4) d'annuaire téléphonique en grand nombre.
Ciseaux, matériel usuel de géométrie.

Organisation de la classe
Groupes de quatre pour une meilleure disponibilité du matériel et un échange sur les premières réalisations. Le travail est cependant individuel.

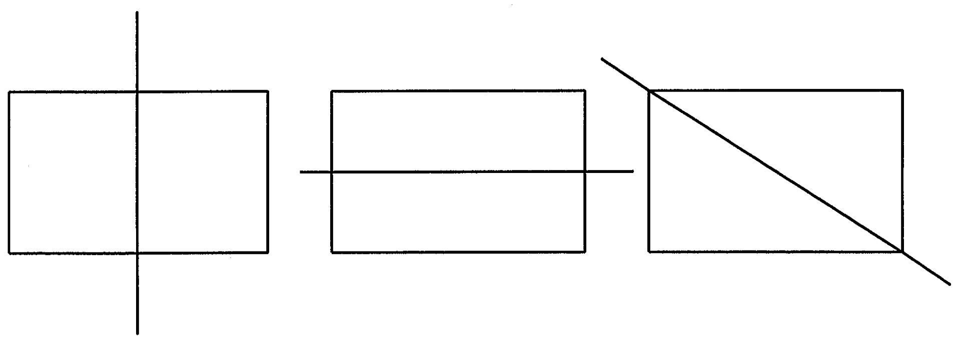
DEROULEMENT DE L'ETAPE 1

ASPECTS MATHEMATIQUES

Principe
Le déroulement des séances est prévu en fonction des objectifs mathématiques. Les objectifs didactiques seront plus spécifiquement travaillés lors de l'analyse de l'activité.

Consigne 1
"Vous devez partager chaque feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollage (c'est à dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale) ; vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage que nous désignerons par (P)".

Analyse de la tâche
Deux solutions évidentes se présentent naturellement aux étudiants, les partages suivant une des médianes (droites joignant les milieux des côtés opposés) du rectangle de départ. Le partage par la diagonale nécessite un retournement de l'une des parties pour vérifier la superposabilité, ce qui leur fournit une autre forme de superposabilité, moins évidente immédiatement.



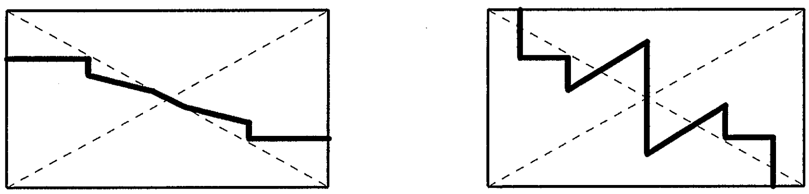
La disposition en groupes permet de prendre des indices sans qu'ils soient formulés (ce qui serait trop précoce) sur des partages possibles remarqués chez les voisins.
Un temps suffisant de recherche est indispensable à la production de solutions moins classiques (lignes de partage brisées ou mêlant arcs de courbe et segments de droite).
Les étudiants peuvent à tout moment contrôler leurs productions et éliminer celles qui ne conviennent pas.

Procédures observées

- Les étudiants commencent par plier en deux suivant les médianes, puis les diagonales du rectangle. En général à ce moment, certains pensent qu'ils ont trouvé tous les partages possibles, il est alors nécessaire de redonner la consigne en précisant qu'ils doivent essayer d'en trouver d'autres.
- La procédure suivante consiste à plier la feuille de telle sorte que deux sommets diamétralement opposés se superposent. Ce partage permet généralement à l'idée qu'il existe un nombre infini de solutions de se répandre, la ligne de partage étant une droite passant par le centre du rectangle. La consigne évolue alors vers la caractérisation de "bonnes lignes de partage".

Les autres procédures que l'on rencontre sont les suivantes:

- des pliages en 8 ou 16, suivis de dépliages et découpages en suivant certaines lignes de pliage plus ou moins bien choisies (d'où des réussites ou des échecs!) ;
- des recherches en construisant des segments de même longueur en partant de deux sommets diagonalement opposés ;
- des procédures de construction d'une ligne de partage symétrique par rapport à une médiane, qui évoluent (à cause de l'échec de ces procédures) vers la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport au centre de la feuille.



Remarque

On peut constater de très nombreux essais qui n'aboutissent pas ; mais ces essais permettent à leur auteurs de faire de nouvelles hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage. De nombreux étudiants trouvent assez vite comment construire une ligne de partage polygonale qui permet de résoudre le problème, et en faisant des tracés symétriques de part et d'autre du centre de la feuille; puis certains cherchent des lignes de partage curvilignes à main levée ou en traçant des arcs de cercles.

Synthèse

Le formateur circule et ramasse certaines des moitiés de feuilles qui conviennent selon les affirmations des étudiants. Il les dispose sur une grande affiche placée sur le mur de la classe. L'ensemble de la classe examine les productions, tout étudiant sceptique sur la validité d'une

production peut demander la vérification, auquel cas l'étudiant qui dispose de la moitié superposable vient la comparer à celle du tableau et reformer la feuille entière.
Une courte synthèse, sans intervention du formateur, est faite sur les méthodes de partage qui marchent : certaines propriétés de l'invariance d'une courbe par symétrie centrale sont explicitées par les étudiants pour définir la ligne de partage.

Institutionnalisation
- Les deux parties issues d'un partage (P) sont **superposables**, elles ont donc même forme et même périmètre.
- Deux parties issues de deux partages (P) différents ne sont pas directement superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété: *"avec deux parties analogues à chacune d'elles, on peut reconstituer la feuille entière"*; elles sont donc aussi "étendues" l'une que l'autre, elles contiennent la même quantité de papier, elles correspondent toujours à "une demi feuille", on dit qu'elles ont **même aire**.
- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement la **même forme**.
- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement le **même périmètre**.
- Deux surfaces **superposables** ont **même aire**, **même forme**, même périmètre.

Explicitation didactique
Aucun titre n'avait été donné préalablement à cette séance, nous pouvons maintenant annoncer aux étudiants qu'il s'agit d'une première situation visant à l'enseignement des aires, permettant de renforcer leurs connaissances sur ce thème et de leur donner des illustrations d'activités possibles dans des CM.
Ainsi cette première situation peut être menée de cette façon dans un CM, avec le même découpage des étapes.
Puis nous explicitons le principe de formation sur ce thème des aires et de leur mesure : mettre en situation les étudiants, en donnant donc des exemples de gestion de classe, sur certains problèmes liés aux aires, ces problèmes étant ordonnés selon la progression liée à l'apprentissage d'une grandeur, et en leur précisant dans quelle mesure ces problèmes sont transférables dans un CM.

Consigne 2
"Appliquez la consigne de partage (P) mais cette fois-ci en partant d'une demi-feuille de bottin de forme rectangulaire."

Analyse de la tâche

Cette consigne permet un réinvestissement des propriétés de la ligne de partage et une utilisation en acte plus fine des propriétés liées à la symétrie centrale. Elle laisse libre cours à l'imagination et donne des productions très esthétiques. Elle permet de s'approprier pleinement le problème.

Synthèse et institutionnalisation

La séance se poursuit comme précédemment, la synthèse permettant de créer une nouvelle famille de surfaces, qui n'ont pas la même aire que les précédentes, de préciser et de nommer ce qui caractérise la bonne ligne de partage. L'institutionnalisation mathématique se fait alors avec les étudiants sur la symétrie centrale, et les courbes admettant un centre de symétrie.

ANALYSE DE L'ETAPE 1 AVEC LES ETUDIANTS

Principe

Dans une deuxième partie, nous demandons aux étudiants de faire un pas de côté par rapport à la situation qu'ils ont vécue : ils doivent se considérer comme enseignants maîtres titulaires auxquels le formateur explique ses choix, montre comment il a évalué leurs réactions a priori, en a tenu compte dans le déroulement, etc. Nous leur demandons un effet de décentration et de distanciation.

Il s'agit donc d'analyser l'activité des étudiants et la conception de la séance, sachant qu'elle est également une proposition de séance pour un CM. Les raisons qui nous ont fait choisir cette situation (cf. au début) sont explicitées aux étudiants sous forme d'un court exposé, animé par quelques questions. Résumons les.

Analyse mathématique

Cette première étape permet de définir la grandeur aire, par la définition en acte d'une relation d'équivalence sur un ensemble de surfaces (non matérialisées au départ), la relation "avoir même aire" et la construction des classes d'équivalence de surfaces de même aire. La notion d'aire existe indépendamment du nombre.

Analyse didactique

La situation proposée est un exemple de situation de recherche. Elle débute par une phase d'action, qui joue un rôle important dans l'émission d'hypothèses sur la ligne de partage et permet l'invalidation de l'hypothèse. La situation permet un contrôle interne des productions. Une phase de formulation intervient au moment de la synthèse pour caractériser la ligne de partage (sur la notion d'existence de centre de symétrie) et au moment du codage numérique des classes de surfaces (sur le codage fractionnaire).

Le choix de la situation contribue à sensibiliser à l'existence d'un critère commun (l'aire) à des objets sensiblement différents, et permet de définir cette notion, par la production d'objets ayant la même aire et d'objets n'ayant pas la même aire (principe classificatoire).
On rencontre différents statuts de savoir : outil pour la symétrie centrale, savoir objet pour l'aire dans l'institutionnalisation, codage outil pour les fractions.

Conséquence pour la classe
Cette troisième partie de l'analyse permet de distinguer l'analyse de l'activité qu'ont vécue les étudiants de celle, a priori, de l'activité ressemblante qui serait envisageable pour un CM. L'analyse ici consiste à informer les étudiants que la situation étudiée peut être mise en place dans un CM, avec comme objectif une introduction de l'aire et globalement la même gestion de classe. C'est l'exemple d'une situation riche de démarrage sur la notion d'aire, comme le montre la suite.
Bien entendu des activités de réinvestissement sont souhaitables, dont voici les consignes possibles, mais elles feraient dans une classe de CM l'objet de séances disjointes. Nous prévenons les étudiants que ces aspects plus pédagogiques seront repris plus tard.

DEROULEMENT DE L'ETAPE 2

ASPECTS MATHEMATIQUES
La finalité de cette étape est de fonder de nouvelles familles de surfaces de même aire et d'inventer des procédés de comparaison d'aires de surfaces.

Consigne 3
"Réitérez le partage (P) mais à partir d'un quart de feuille de forme rectangulaire."

Consigne 4 (menée avec les étudiants dans la suite pour qu'ils puissent utiliser leurs morceaux restants)
"Fabriquez des surfaces de même aire que la feuille entière"

Procédures observées
- Utiliser des morceaux déjà tout prêts en vérifiant la concordance avec la feuille entière : deux demi-feuilles ou une demi-feuille et deux quarts de feuille ou....
- Découper une feuille entière de bottin et assembler différemment tous les morceaux.

Synthèse et institutionnalisation
L'activité a permis de mettre en oeuvre de nouveaux moyens de fabriquer des surfaces de même aire que celle donnée :

- assembler des morceaux de cette surface, d'aires connues par rapport à cette surface ;
- découper et rassembler sans perte la surface de départ.

L'aire est donc une grandeur qui intègre une addition (principe d'additivité de la grandeur aire) ; si on découpe une surface et assemble différemment les morceaux, la nouvelle surface obtenue a même aire que l'ancienne (principe de conservation des aires).

Consigne 5

"Fabriquez par groupe deux ou trois surfaces de même aire qui ne peuvent pas s'intégrer aux familles du tableau"

Le formateur récolte les surfaces, les installe sur des affiches et demande aux étudiants de ranger toutes les surfaces selon leur aire.

Analyse de la tâche

Les étudiants disposent de leurs morceaux antérieurs pour créer des assemblages ayant des aires non encore répertoriées. Ils peuvent recourir à un codage des surfaces (des familles) et utiliser ce codage pour les comparaisons. Mais ils peuvent aussi se référer à des surface de référence de chaque famille (un représentant de la famille) plus aisément comparables entre elles. Une référence pratique, induite par le processus de partage de départ, est un rectangle, la tâche est grandement facilitée si les deux rectangles à comparer ont une dimension commune.

Procédures observées

Un recours aux nombres pour les uns (en particulier aux fractions) ; une comparaison deux à deux pour les autres avec une référence à la feuille entière quand c'est possible, ou la construction de rectangles, approximativement de même aire, pour départager.

Synthèse

Elle se fait sur la possibilité et les moyens de changer la forme d'une surface tout en conservant l'aire, pour pouvoir la comparer avec une autre surface relativement à l'aire. Elle pointe la nécessité latente d'un codage des différentes familles pour en parler.

D'où l'exploitation signalée à l'école de cette situation.

PROLONGEMENT PEDAGOGIQUE AU CM

L'étape 2 fournit l'exemple de situations pour le CM. Cependant le temps imparti aux élèves est plus long, et l'étape 2 fait l'objet d'une deuxième séance. La fabrication d'autres familles de surfaces donneront lieu à d'autres séances.

Simultanément au travail sur l'aire et en cours d'activité, la nécessité d'un codage des familles se fait sentir. Le maître induit alors l'idée d'un codage numérique, qu'il applique à la famille de la feuille entière : 1 ou 1 unité. Il en déduit avec les élèves les codages numériques associés aux autres familles.

La famille demi-feuille reçoit naturellement le codage "un demi" que le enfants écrivent rarement sous la forme $\frac{1}{2}$, mais que le maître institutionnalise de cette façon.

$\frac{1}{2}$ a immédiatement un sens lié à la situation : $\frac{1}{2}$ c'est 1 partagé en 2, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.., $2 \times \frac{1}{2}=1$

Le maître associe des égalités d'écritures fractionnaires aux types d'assemblages.

Cette situation permet donc aussi de donner du sens aux fractions et d'introduire (ou de réinvestir) des nombres non entiers.

Le maître déduit avec les élèves les propriétés des nombres codant les autres aires et introduit le codage fractionnaire approprié et les écritures qui éclairent son sens.

Les aires supérieures à l'unité reçoivent des codages sous forme d'écritures additives, du type $1+\frac{1}{2}$ ou $1+\frac{1}{4}$ que les assemblages constitués peuvent aider à écrire sous forme d'une seule fraction (avec les exemples $\frac{3}{2}$ *et* $\frac{5}{4}$).

ANALYSE DE L'ETAPE (et de ses prolongements)

Comme pour la première étape, nous annonçons aux étudiants un pas de côté, en les considérant nous plus comme élèves, mais comme enseignants, que nous essayons de convaincre de l'intérêt de cette séance. Ils ont bien sûr tout loisir d'intervenir pour contester ou préciser leur état de réflexion pendant l'activité.

Analyse mathématique

La construction d'un codage numérique dans les conditions précédentes correspond à une mesure, la construction d'une application de l'ensemble quotient des classes de surfaces dans l'ensemble des nombres réels telle que :

- la grandeur correspondante est mesurable (l'additivité fonctionne pour cette grandeur) ;
- l'application est positive, additive et monotone (à plus grande aire, plus grand nombre),
- elle est parfaitement déterminée par le choix d'une unité (ici l'aire de la classe de la feuille A4, qui s'appelle alors étalon),
- elle vérifie les propriétés suivantes : l'inégalité triangulaire, le vide a une aire nulle, il existe des ensembles de points non vides d'aire nulle (les segments), elle est invariante par isométrie.

La notion de grandeur existe indépendamment de celle de mesure.

Quelques compléments mathématiques sur la mesure (qui trouvent souvent leur place en deuxième séance seulement)
Si l'étalon change, les nombres associés aux aires changent mais les aires restent les mêmes, c'est-à-dire les classes de surfaces sont invariantes.

Familles Etalon	demi-feuille	quart de feuille	demi-quart de feuille	feuille entière	feuille plus quart de feuille
feuille entière	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{5}{4}$
demi-feuille	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{5}{2}$
huitième de feuille	4	2	1	8	10
une feuille un quart	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$	1

La liste de nombres correspondants à un étalon est proportionnelle à celle correspondant à un autre étalon ; ainsi la deuxième ligne s'obtient en divisant par deux la première, la troisième en multipliant par deux la première, par quatre la seconde, etc.
En résumé, le changement d'unités fait passer d'une liste de nombres mesurant les aires à une liste de nombres proportionnels. Le changement d'unités de mesure (c'est vrai pour toutes les mesures) est donc en réseau avec la proportionnalité.

Analyse didactique
La situation de départ, si elle est dans la progression pour les étudiants utilisée pour des compléments mathématiques sur l'aire, permet aussi d'éclairer la notion de fraction et de montrer la nécessité de codages numériques représentant des quantités inférieures à l'unité.
En classe elle est située à un carrefour des progressions sur les aires et sur les nombres autres qu'entiers. Elle donne l'exemple de la complexité de la connaissance mathématique et des imbrications des savoirs à l'intérieur d'une situation. Sa multiplicité ne doit pas effrayer, au contraire, puisqu'elle permet d'introduire relativement naturellement des notions difficiles.
L'étude de deux notions mathématiques nouvelles n'est aucunement en contradiction avec les hypothèses sur la construction des connaissances, bien au contraire.
La situation proposée fournit un exemple d'introduction de nouvelles notions mathématiques par la gestion des contraintes sur lesquelles peut agir le maître.
Variable didactique
Le choix de la famille étalon est une variable didactique, dans la mesure où ce choix peut nécessiter ou non, à ce moment, des nombres plus petits que 1 ; si le maître porte son choix

sur par exemple la classe huitième de feuille entière, dans la mesure où des représentants de cette classe existent, toutes les autres aires de la séance se codent par des entiers.

D. Analyse de la séance

Sur l'évolution des compétences mathématiques des étudiants

Déboussolés au départ par la simplicité de la consigne et craignant d'avoir été sous-estimés, les étudiants s'investissent ensuite dans la réalisation de surfaces de formes diverses. Ils manifestent les mêmes réactions que les élèves, aussi bien dans l'évolution de leurs recherches que dans leur désir de se faire reconnaître, proposant leurs productions au formateur.
Leurs souvenirs de la symétrie se manifestent d'abord par référence à la symétrie axiale, qu'ils ne différencient pas dans un premier temps de la transformation qui rend invariante la ligne de partage. Cette situation permet donc à notre sens de bien différencier ces deux transformations (et simultanément de justifier en quelque sorte l'analogie de leurs noms, malgré la différence de leurs propriétés).
Ils sont bien sûr surpris de découvrir que les conclusions sur les périmètres ne peuvent se transférer si simplement aux aires ; ils résistent à cette nouvelle connaissance, comme nous le verrons dans l'étape correspondant à la construction du formulaire sur les surfaces. Ce qui nous permet de pointer, en acte, la résistance des vieilles conceptions face aux nouvelles connaissances et la nécessité de sans cesse mettre à l'épreuve ces connaissances construites contre un obstacle.
Globalement nous trouvons ces situations utiles aux étudiants, dans la mesure où nous "sentons" s'opérer progressivement, et avec les reculs locaux incontournables, une restructuration des connaissances sur les aires : le pourcentage d'étudiants affirmant que deux surfaces n'ont pas la même aire parce qu'elles n'ont "pas du tout" la même forme diminue au fur et à mesure des vérifications ; les différences de périmètre pour des formes de même aire sont reconnues, sans être mises au compte d'erreurs de mesure ou d'approximations trop larges.

L'homologie semble là porter des fruits du côté du savoir mathématique, il est plus difficile d'évaluer, de plus à long terme, l'impact de la méthodologie de formation retenue sur ce thème. Il semblerait cependant que le plaisir de retrouver du sens au savoir, notamment de pouvoir s'expliquer des "mystères" sur les aires (notamment les formules) place cette progression en bonne place dans leur mémoire de futur enseignant.

Sur l'évolution de leur conception de l'enseignement

Signalons que la vigilance du formateur doit être constamment en alerte : les étudiants trouvent cette situation intéressante pour leurs connaissances et acquiescent à la possibilité de la voir se réaliser dans une classe. Cependant dans leur brève analyse de ses avantages, ils sont parfois enclins à porter l'intérêt principalement au côté manipulatoire de l'activité : autrement dit ils semblent convaincus que les élèves devront découper et comparer pour aborder les aires, mais restent encore peu sensibles aux principes d'organisation générale des situations. La phase d'explicitation des choix du formateur et des hypothèses didactiques sous-jacentes (dans une stratégie de transposition), qui prouve aussi l'existence d'éléments théoriques qui délimitent ce travail, a donc, à notre avis, une importance capitale dans la communication des connaissances.

V. Deuxième séance

Suite aux contraintes de temps réel de la classe, des éléments de la première séance, notamment d'analyse, peuvent être gardés pour la deuxième séance qui a lieu une semaine plus tard. Les productions des étudiants collées sur des affiches permettent de conserver la mémoire de la classe et de pouvoir soit raconter l'histoire de la séance précédente, soit appuyer l'analyse sur cette évocation visuelle.

A. Objectifs

- Objectifs mathématiques
  - Différencier aire et périmètre
  - Inventer et utiliser des moyens de comparaison d'aires de surfaces
  - Connaître le système international des unités d'aire
- Objectifs didactiques
  - Pointer la notion d'obstacle épistémologique
  - Montrer comment prendre en compte cette notion d'obstacle
  - Montrer l'exemple d'une variable didactique pour les aires de surfaces planes : le papier support
- Objectifs pédagogiques

  Poursuivre la proposition de progression sur l'aire et sa mesure

  Proposer l'utilisation d'affiches comme mémoire de la classe.

B. Choix de la situation

L'objectif mathématique essentiel étant la différentiation aire-périmètre, plusieurs situations de classe élémentaire sont connues, notamment la recherche de rectangles d'aire maximum à périmètre fixé ou de périmètre maximum à aire fixée[150], mais ces situations sont trop riches pour que le temps d'exploitation soit suffisant avec les étudiants. En effet pour minimiser les effets de dénaturation liées à une situation traitée avec les étudiants par une homologie directe, il nous semble souhaitable de l'envisager sous tous ces angles, pour pouvoir mettre en relation le temps-étudiants et le temps élèves. Nous avons donc préféré ne pas utiliser les situations citées comme support de formation, ne pouvant y consacrer le temps minimum que nous souhaitions (ou ne nous les étant pas suffisamment appropriées pour les "faire tenir" dans le temps dont nous disposions).

Elles fournissent par contre d'indispensables références pour l'étude de problèmes de différentiation aire -périmètre, auxquelles nous pouvons renvoyer les étudiants.

Nous choisissons donc une situation sur laquelle nous ne pouvons mettre en place qu'une homologie indirecte, ce qui devrait nous permettre d'atteindre les objectifs mathématiques visés, tout en restant dans la méthodologie de l'enseignement que nous préconisons, ce qui nous paraît indispensable pour des savoirs que les étudiants maîtrisent mal.

Simultanément cette situation leur permet de rencontrer un objet mathématique contemporain et "à la mode" et de traiter de l'extension des méthodes de comparaison d'aires par les contraintes de l'objet proposé.

C. Organisation de la séance

Matériel

Une fiche photocopiée par élèves, comme ci-dessous[151].

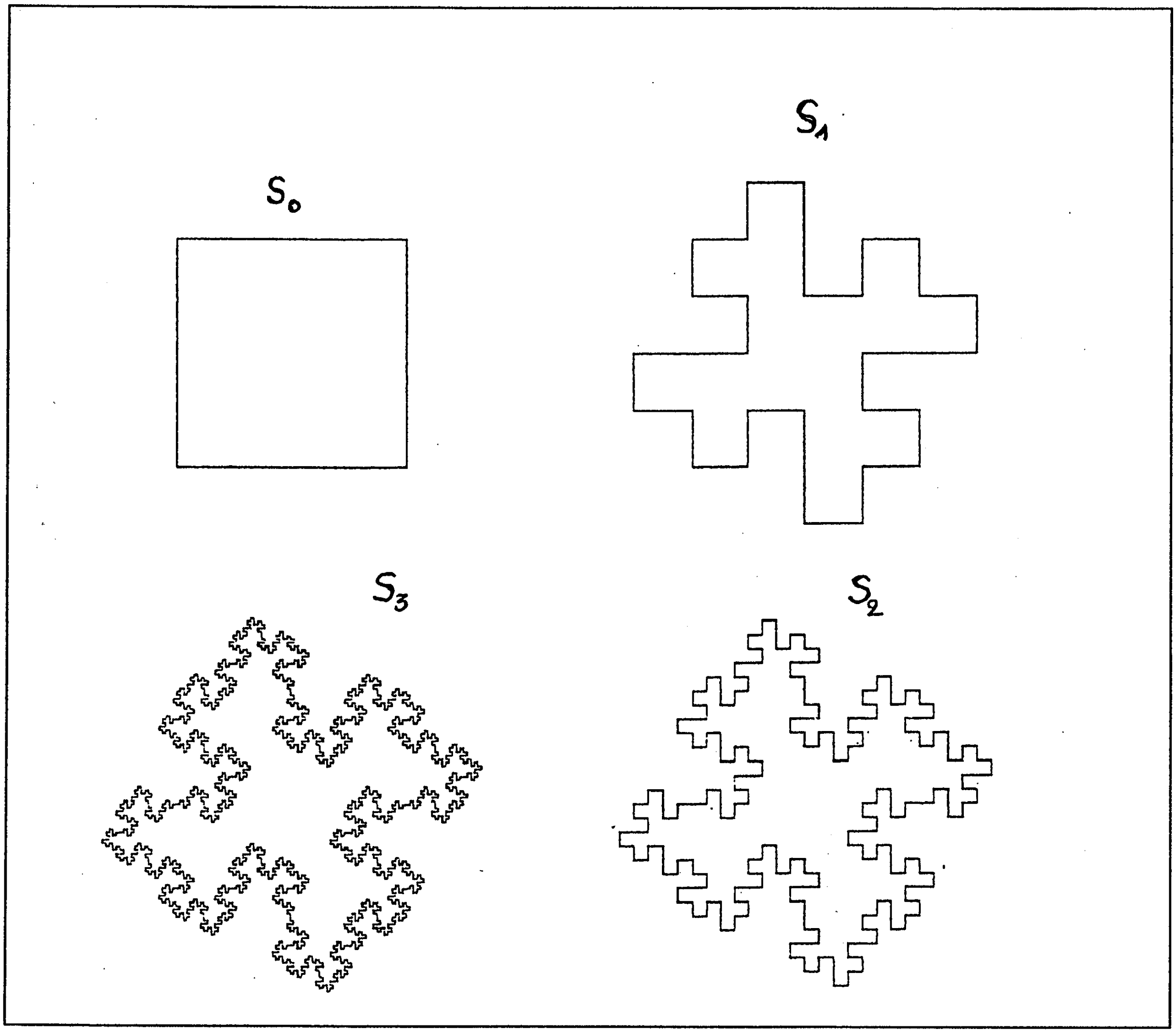
Matériel de géométrie, calque à disposition.

Organisation de la classe

Travail individuel.

[150] R.Douady, M.J.Perrin-Glorian (1986), *Nombres décimaux*, IREM de Paris 7

[151] En annexe R, page 328, le programme en LOGO qui permet d'obtenir ces courbes. L'étude de ce programme constitue un prolongement possible en informatique, notamment pour faire fonctionner la récursivité.



DEROULEMENT

ASPECTS MATHEMATIQUES

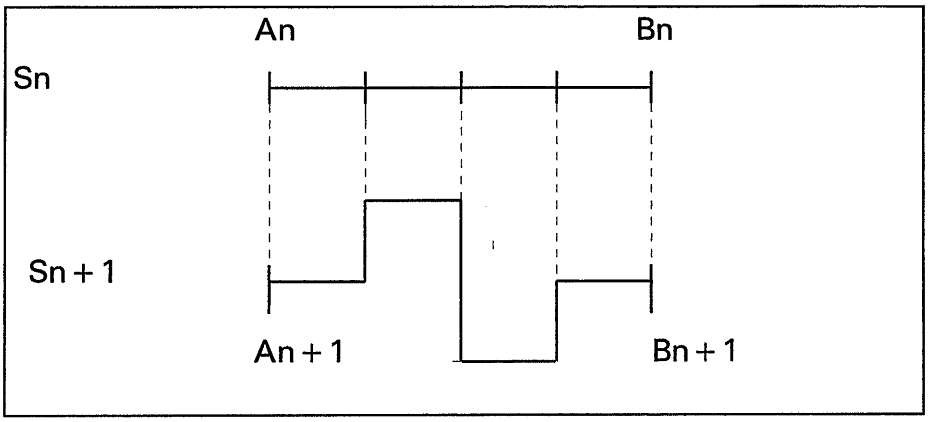
Consigne

"Vous avez sur votre feuille quatre surfaces S_0, S_1, S_2, S_3, aux détails de plus en plus complexes. Vous devez comparer les périmètres et les aires de ces surfaces."

Analyse de la tâche

Les différentes surfaces sont obtenues par un procédé récurrent :

pour passer de S_n à S_{n+1}, il suffit de partager tout segment de droite limitant S_n en quatre segments de même longueur et de remplacer une fois sur deux ce quart de segment par les trois quarts d'un carré de côté ce quart de segment.



Variation du périmètre de S_n à S_{n+1} : la longueur $l(A_nB_n)$ de la courbe A_nB_n devient $l(A_{n+1}B_{n+1}) = 2\, l(A_nB_n)$,
le périmètre de S_{n+1} est donc le double de celui de S_n, donc $P(S_n) = 2^n\, P(S_0)$, par une récurrence immédiate.

Variation de l'aire de S_n à S_{n+1} : l'aire ne varie pas dans la transformation de S_0 à S_1, donc pas non plus dans celle de S_1 à S_2, donc $A(S_n) = A(S_0)$

Nous avons donc l'exemple de surfaces de périmètres différents et cependant de même aire. L'objet mathématique obtenu quand n tend vers l'infini se nomme une fractale : l'aire de cette fractale est celle du carré de départ, alors que son périmètre est infini. Par ce procédé de fabrication, il est donc possible de fabriquer une surface d'aire fixe, celle d'un carré de départ et de périmètre aussi grand que souhaité (du moins supérieur à n'importe quel nombre).

Pour comparer l'aire de S_0 et S_1, les étudiants peuvent retrouver dans S_1 le carré S_0 par exemple en utilisant un calque de S_0 posé sur S_1 et retrouver l'aire de S_0 par compensation : un carré placé à l'extérieur compensant un trou intérieur. Ils peuvent aussi paver les deux surfaces par des carrés d'aire 1/16 de celle du carré S_0.
Ces deux procédés peuvent s'étendre au carré S_2 obtenu par comparaison au carré S_1 ; mais la tâche est déjà plus difficile ; le passage de S2 à S3 nécessite l'étude plus en détail du processus de fabrication des surfaces.

Procédures observées

Les deux procédés précédents se rencontrent à peu près équitablement. Certains étudiants découpent S_1 pour faire un puzzle de S_0. Les conclusions de tous concordent : S_0 et S_1 ont la même aire, mais S_1 a un périmètre plus grand.

Seuls quelques étudiants très méticuleux mènent à bien le pavage de S_2 par des carrés d'aire 1/256 de S_0 ; les autres cherchent le mode de construction qu'ils voient globalement identique au passage de S_0 à S_1.
Dans un groupe, une huitaine d'étudiants sur 25 a cherché et trouvé le mode de construction.

Synthèse
Nous faisons expliciter les conclusions qu'elles soient incomplètes ou complètes, en gardant si possible sûr les plus complètes pour la fin, par exemple un étudiant communique le mode de construction de S_n à S_{n+1}, nous parlons alors brièvement de fractales, dont généralement quelques étudiants ont entendu parler, et de son incidence sur la recherche actuelle en mathématiques et dans les disciplines.

Institutionnalisation
Nous soulignons les deux aspects mathématiques importants, liés à l'activité, que les étudiants doivent retenir au sujet des aires.
1 - Pour comparer l'aire de deux surfaces, deux méthodes rencontrées :
- ramener par une transformation conservant les aires l'une des surfaces à l'autre (méthode déjà rencontrée) ;
- trouver une surface constituant un pavé (permettant le pavage) pour les deux surfaces et comparer le nombre de pavés contenus dans chaque surface.
Le quadrillage joue ce rôle pour les surfaces dessinées sur papier quadrillé et transforme l'activité de comparaison d'aires en comptage de carreaux.
Ces deux méthodes de comparaison de mesure sont aussi valables pour les longueurs, comme nous avons pu le constater ici.
2 - Les grandeurs périmètre et aire sont indépendantes l'une de l'autre : il est possible d'augmenter infiniment le périmètre d'une surface sans changer son aire.

ANALYSE AVEC LES ETUDIANTS

La partie visant à préciser des savoirs mathématiques sur les aires étant terminée, nous les engageons à un recul par rapport à l'activité vécue, d'abord de type mathématique, puis didactique.

L'analyse mathématique porte sur l'explicitation des objets mathématiques et les conclusions mathématiques à tirer de cette recherche. Elle suit les grandes lignes suivantes.

"Voici un exemple de situation fabriquée à votre intention, pour simultanément vous mettre en contact avec un objet contemporain des mathématiques et vous convaincre de la différenciation aire-périmètre. Pour résoudre le problème posé, vous avez utilisé une nouvelle méthode pour comparer les aires de deux surfaces, le pavage par des pavés communs aux deux surfaces, ce qui enrichit le stock des méthodes de comparaison d'aires. Cette méthode de pavages joue un rôle particulier dans l'enseignement de la mesure des aires puisqu'elle permet notamment de transformer une question sur la grandeur aire en un comptage de pavés intérieurs à la surface. Cette méthode est également précieuse pour obtenir des encadrements de mesures d'aires : le nombre de carreaux intérieurs à une surface et le nombre de carreaux minimum couvrant la surface nous donnent les deux bornes d'un encadrement de la mesure de l'aire, aussi fin qu'on le souhaite (il suffit de choisir la taille des pavés du quadrillage).

Analyse didactique

Nous pointons les aspects didactiques pertinents de cette situation.

La situation choisie est l'exemple d'une situation qui permet aux étudiants de réinvestir des procédés déjà éprouvés (la comparaison par découpage et ré-assemblage pour retrouver une des deux surfaces de départ) ou de créer un nouveau moyen : le problème est donc réalisable par tous, la synthèse permet à tous de constater l'efficacité et simultanément les limites des deux méthodes (notamment quand le quadrillage ou le découpage devient trop fin). Seule la *contrainte* portée par le choix de l'objet amène à inventer de nouvelles méthodes de comparaison (notion de variable didactique liée au choix de l'objet).

Le support pour le dessin des surfaces proposées joue un rôle non négligeable : un support quadrillé, contrairement au papier uni, risque d'induire l'utilisation d'une seule méthode de comparaison d'aires, le support est ici une *variable didactique*, puisqu'il a une incidence sur les procédures utilisées. Pour les mesures d'aires en général, le support papier uni ou réseau de carrés, de triangles, etc. est une variable didactique.

La situation permet de produire des surfaces qui, bien que de même aire, ont des périmètres très différents : les étudiants agissent sur ces surfaces pour se les approprier, cette action devrait leur permettre une meilleure prise en compte de la différence périmètre-aire. La confusion entre ces deux grandeurs est courante et inévitable naturellement, elle constitue un *obstacle didactique,* les longueurs étant, dans le système scolaire, les premières grandeurs attachées aux objets géométriques. Cet obstacle doit donc spécifiquement être pris en compte dans l'enseignement, des actions qui mettent en défaut ces conceptions peuvent permettre de le reconnaître puis de le surmonter.

PROLONGEMENT PEDAGOGIQUE

Cette partie a pour but de préciser à l'étudiant pourquoi et en quoi le cours qu'il a suivi jusqu'à maintenant peut fournir un enrichissement de sa pratique de classe. Elle essaie de replacer les informations reçues dans le contexte de la préparation de classe du maître.

Une progression sur les aires se doit d'inclure des situations permettant aux élèves d'enrichir leurs méthodes de comparaison des aires et d'y intégrer le pavage ou l'utilisation d'un quadrillage qui permettra au moins d'obtenir une approximation du nombre de carreaux pavant la surface, approximation qui permet souvent de conclure dans des comparaisons d'aires.

Cet objectif (mesure d'aires par pavage) peut constituer l'étape 3 d'une progression sur les aires, dans la continuité des deux étapes de la séance précédente.

L'importance du support (par exemple uni ou quadrillé) permet de convertir un exercice de mesure des aires en comptage de carreaux ; une différentiation des supports proposés aux élèves différencie les tâches. Un travail d'entraînement important consiste à proposer à la comparaison d'aires des surfaces construites sur un papier en réseau

De même un travail spécifique est conseillé sur la différence périmètre et aire et leur relative indépendance. De telles situations sont développées dans la brochure de Douady et Perrin-Glorian, dont les références sont données : il s'agit de trouver différents rectangles de même périmètre et de comparer leurs aires, puis de comparer des périmètres de rectangles de même aire. Ces situations peuvent efficacement servir de réinvestissement sur les aires, tout en apportant un contenu nouveau, la différence aire-périmètre.

Une quatrième étape de la progression sur les aires est une présentation des unités de mesure d'aire, du système international. Cette étape est racontée aux étudiants, en insistant sur les aspects suivants :

- l'étape 3 a montré l'utilité d'un étalon commun, les unités d'aire conventionnelles se situent dans cette continuité, celle d'une convention internationale sur les unités de mesure, soit pour l'aire, le mètre carré, et ses multiples et sous-multiples ;
- le dm^2, choisi parce qu'il est plus facile de dessiner une surface de cette aire n'est pas un carré de 10 cm de côté, mais l'aire d'un tel carré ; cette aire peut donc être indifféremment représentée (ce qu'oublie un certain nombre de manuels scolaires) par un rectangle, un triangle, un parallélogramme ou n'importe quelle autre surface obtenue à partir du carré selon une transformation conservant les aires. Il n'y a pas lieu d'attacher une forme privilégiée à une unité d'aire ;
- transformer un dm^2 en cm^2 résulte de la comparaison des aires de deux surfaces (l'une d'un dm^2, l'autre d'un cm^2), bien choisies pour les comparaisons : c'est donc une recherche tout à fait possible au CM, dans la continuité des activités précédentes (un procédé rapide est le

pavage d'un grand carré par 100 petits carrés) ; les autres conversions relèvent des mêmes procédés ;

- un rappel : la conversion de mesures exprimées avec une unité usuelle en mesures exprimées avec une autre unité usuelle équivaut à l'application d'une fonction linéaire de coefficient une puissance (positive ou négative) de 10 ; cette simplicité justifie a posteriori le choix du système métrique fin du 18 siècle.

D. Notre analyse du point de vue du formateur

La situation de départ fournit un exemple d'étude d'objet géométrique, contemporain et curieux, intéressant pour l'aire et le périmètre ; les contraintes de l'objet à étudier amènent à envisager de nouvelles méthodes pour mesurer les aires.

Elle présente aussi certains défauts : les étudiants pris dans leur recherche sont moins à même de prendre le recul du futur enseignant face à la situation, ils restent préoccupés par la distance entre leurs conceptions initiales et les propriétés mathématiques réelles. C'est pourquoi une analyse commune, après coup, de la façon dont a été vécue l'activité nous paraît indispensable, pour qu'ils prennent conscience de l'insuffisance de certaines présentations sur l'aire qu'ils ont pu observer soit sur le terrain en observation, soit dans les manuels.

Cependant, comme il ne s'agit pas d'homologie directe, nous pensons que le principe de la situation sera moins facilement transféré par les étudiants dans leurs classes, même si nous leur donnons les références utiles.

Alors pourquoi ce choix alors que nous aurions pu mettre en scène une recherche sur l'optimisation de l'aire du rectangle à périmètre constant avec autant d'avantages (sauf la curiosité fractale !) plus la possibilité d'une homologie directe[152]. Nous avons signalé les contraintes de temps au début de cette partie. Notre situation, plus économique quant au temps de recherche, permet simultanément de pointer une nouvelle méthode de mesure d'aire. Mais surtout, elle nous permet d'exhiber un objet géométrique complexe, que l'informatique a permis de visualiser, et montre un exemple des liens entre ces deux disciplines, ce qui représente un autre aspect des mathématiques à l'école élémentaire et en formation[153].

La contrainte forte avec laquelle nous jouons ces années d'intégration de préparation au concours dans la première année de formation est sans conteste le temps lié à la nécessité de traiter les thèmes du plan de formation (le programme du concours). Ainsi l'équivalent des

---

[152] Rappelons qu'une homologie directe est une stratégie utilisant une situation didactique construite pour l'école élémentaire comme une situation de formation.

[153] Cf. des exemples de séances conciliant mathématiques et informatique dans *Math et info au CM* tome 1 (1989) et tome 2 (1991, *Voyages aux frontières de l'ensemble de Mandelbrot)*, M.Canu et al., IREM de Rouen : ces séances sont d'ailleurs adaptées en formation avec des stratégies d'homologie.

deux premières étapes, un peu plus développées, occupait deux séances de trois heures dans les formations où le concours avait eu lieu avant la formation professionnelle, ce qu'actuellement nous "bouclons" en une séance de deux heures !

Les économies se font du côté du temps qu'on donnait aux étudiants pour réaliser, puis s'exprimer ou contester les réalisations, dans le nombre de surfaces et de familles différentes que les étudiants réalisaient effectivement (aujourd'hui on raconte la suite de la séquence, demandant aux étudiants de transférer la méthode), dans la finesse de l'analyse didactique et de ses prolongements pédagogiques. En effet il nous semble par moment déplacé de préciser tel ou tel détail de classe, alors que la seule préoccupation de nos étudiants est de noter, à la lettre, tout ce qui peut servir...au concours.

Ces économies de temps nous semblent en partie nuire à l'équilibre entre enrichissement sur le savoir mathématique et apport de connaissances didactiques et pédagogiques. Si les compétences des étudiants augmentent régulièrement sur les mathématiques (mais restent souvent très superficielles), par contre nous ne sommes pas sûrs d'un impact de même type sur leurs connaissances professionnelles (peut-être à tort d'ailleurs !).

L'information sur le système métrique et les unités usuelles se fait sous une forme culturelle, mêlant informations mathématiques et faits de société (la révolution et son effet sur l'utilisation du système métrique) et remarques didactiques, devant permettre de prendre du recul par rapport aux passages des manuels renvoyant à cette étape.

VI. Troisième séance

A. Objectifs

- Objectifs mathématiques
    - Construire les formules d'aires des figures usuelles
    - Distinguer les transformations de surfaces conservant l'aire et celles ne la conservant pas
    - Comprendre et relativiser le formulaire sur les aires
- Objectifs didactiques
    - Lier compréhension de formules et construction préalable
    - Rôle des changements de cadres (numérique, géométrique, grandeur)
    - Changement de point de vue : statique, dynamique.
- Objectifs pédagogiques

    Poursuivre la proposition de progression sur l'aire et sa mesure

B. Choix de la situation

Les étudiants ont, à l'issue de la séance précédente reçu un formulaire sur les aires (et les volumes, cf. annexe S, page 329) et ont été invités à le lire en détail. Ils ont donc été confrontés :

- à un vocabulaire pas toujours très bien maîtrisé (hauteur, base,...)
- à des ambiguïtés de notation : par exemple, la base d'un cylindre est notée B, de même que la grande base du trapèze, la première désignant une aire, la deuxième une longueur, etc.

Ils aspirent en général à deux choses :

- retenir les formules (pour le concours)
- comprendre comment elles fonctionnent, pour lire le formulaire (pour les enseigner).

C'est pourquoi nous choisissons délibérément de les replacer dans une situation d'homologie directe, sachant qu'elle permettra, plus que de longs discours, une efficace remise à niveau sur les formules. De plus une analyse a priori confortée par plusieurs expérimentations nous fait attendre une erreur classique sur laquelle nous souhaitons insister : déformer un parallélogramme en rectangle en conservant son périmètre et penser ainsi conserver l'aire.

C. Organisation de la séance

Consigne 1

"Vous dessinez un rectangle de 5 cm sur 3 cm. Trouvez son aire, plus exactement quels procédés sont disponibles chez l'élève de CM, à ce stade de la progression (étape 5), pour exprimer l'aire du rectangle en cm^2 ?"

Le lien se fait avec un représentant d'un cm^2, les écritures multiplicatives.

Le même problème est posé avec un rectangle de 4,7 cm sur 3 cm ; la difficulté, y compris pour les étudiants étant d'exprimer avec des unités usuelles les fractions de cm^2 qui dépassent les 12 cm^2, ce qui permet de reprendre le sens du mm^2. De même avec un rectangle de 3,4 cm sur 2,6 cm.

On souligne l'importance du support de dessin, le papier millimétré facilitant les conclusions, jouant le rôle de variable didactique, par rapport au papier quadrillé (perturbateur quand les carreaux ont un demi cm de côté) ou blanc.

Le passage à une formule sur le rectangle se fait par généralisation du procédé utilisé, réinvesti dans une classe sur d'autres exemples.

Consigne 2

"Dessinez sur papier blanc un parallélogramme et déterminer, en cm^2, la mesure de l'aire de votre parallélogramme. Le but de cet exercice est que nous arrivions de la même façon que pour le rectangle à une formule sur l'aire du parallélogramme."

Procédures observées

Certains construisent un parallélogramme de mesures un nombre entier de cm, le pavent avec des losanges de côté un cm, et déduisent comme aire en cm^2 le nombre de carreaux (résultat faux).

D'autres transforment un parallélogramme de mesures des nombres entiers de centimètres en un rectangle tout en conservant l'aire, ce qui les amène à tracer une hauteur du parallélogramme, puis ils mesurent cette hauteur et le côté correspondant et en déduisent l'aire comme produit de ces deux nombres. Puis ils étendent sans difficulté à des mesures quelconques (entières ou non entières) : ce procédé est correct.

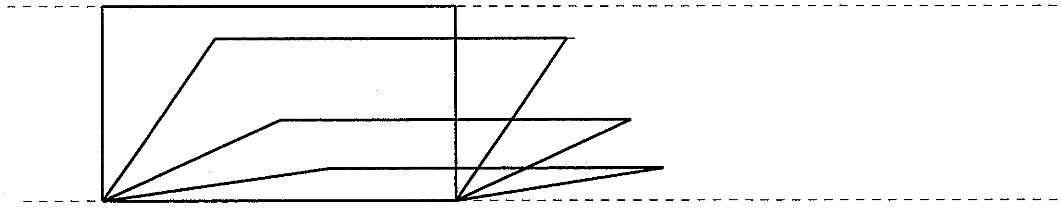
D'autres encore découpent fictivement le parallélogramme en un rectangle et deux triangles rectangles, reconstituant un rectangle : ce procédé est aussi correct.

Synthèse

Les deuxième et troisième méthodes sont validées sans problème. La confrontation des trois méthodes permet de s'interroger sur la première et de constater qu'elle donne des résultats en opposition avec la deuxième. Certains étudiants ne voient pas immédiatement qu'elle s'appuie sur la croyance à une aire de 1 cm^2 pour un losange non carré de 1 cm de côté.

On cherche à montrer que l'aire du losange en question n'est pas 1 cm^2.

Il y a débat dans la mesure où certains prennent comme argument la déformation continue (au sens de "sans rupture") d'un contour dont la longueur reste fixe. Le débat se clôt par la bande dessinée de la déformation d'un rectangle en parallélogramme, par rotation de deux de ses côtés parallèles autour de deux de ses sommets, les deux autres côtés restant fixes. Les parallélogrammes successivement obtenus conservent les longueurs de leurs côtés, mais les hauteurs changent, donc leurs aires varient, elles diminuent jusqu'à atteindre une valeur très petite, quand un des angles tend vers 0.



Dessin fait avec des rectangles de même périmètre,

mais d'aires décroissant avec la distance entre les deux côtés parallèles.

En général, cette illustration convainc les étudiants non encore convaincus que l'aire du losange est inférieure à 1 cm^2 (et qu'il faut s'assurer de l'aire de l'étalon avant de tirer une conclusion numérique).

On conclut donc sur la pertinence de la formule (base x hauteur), donnant l'aire d'un parallélogramme, l'existence de deux hauteurs et de deux bases différentes, la pertinence didactique d'introduire, à ce moment de la progression, le mot de hauteur avec sa définition naturelle (le segment -et la longueur du segment- qui permet de transformer un parallélogramme en un rectangle de même aire et ayant deux côtés de même longueur que deux du parallélogramme).

Consignes suivantes
"Quelles mesures de longueurs pouvez-vous prendre pour calculer les mesures d'aires en cm^2 d'un triangle rectangle, quelconque, d'un losange, d'un trapèze ? Faites le lien avec les formules proposées par le formulaire."

Procédures observées
Les étudiants, par analogie, trouvent comment calculer les aires des surfaces fixées :
- sans difficulté pour le triangle rectangle,
- par découpage en deux triangles rectangles ou doublement en parallélogramme pour le triangle quelconque,
- par découpage en quatre triangles rectangles pour le losange (étonnamment aucun ne réinvestit la formule liée au parallélogramme, sans doute d'une part parce que la notion de hauteur est moins naturelle que celle de diagonale, d'autre part parce que la connaissance un losange est aussi un parallélogramme n'est pas immédiatement disponible),
- pour le trapèze, par découpage en deux triangles rectangles et un rectangle ou en un parallélogramme et un triangle quelconque ; la tâche la plus difficile (parce que dans un cadre algébrique) est de retrouver, à partir des formules déduites de ces procédés, celle proposée traditionnellement dans les formulaires : $\frac{B+b}{2} \times h$.

Le cercle joue un rôle spécifique dans cette série de figures usuelles.
L'aire du disque n'est pas déductible simplement des autres aires (évocation du problème de la quadrature du cercle).
Le formateur peut indiquer (ou faire travailler les étudiants sur ce thème si le temps le lui permet) des idées d'approximation de l'aire d'un disque, soit grossièrement par les aires des carrés respectivement tangent intérieurement et extérieurement au disque, soit plus finement par l'aire d'un polygone régulier convexe à n côtés inscrit dans le disque. Le formulaire donne

d'ailleurs des indications en ce sens. C'est aussi l'occasion de préciser à nouveau la "vraie nature" de π.

Une bonne exploitation de la formule de l'aire du disque, mais alors pour un travail dans un cadre algébrique, est la justification des formules de la couronne et du croissant de disque, donnés par le formulaire.

L'analyse mathématique se fait dans l'action, dans la mesure où les étudiants ont révisé les mathématiques à enseigner aux élèves.

ANALYSE DIDACTIQUE

Comme dans les autre séances, nous annonçons l'analyse didactique aux étudiants et soulignons à cette occasion plusieurs points.

Nous insistons sur la nécessité de donner du sens aux formules afin de pouvoir les utiliser avec pertinence ; cette séance a été construite dans cette optique. Ces formules doivent être perçues (par les étudiants et c'est aussi l'objectif qu'on a pour les élèves) comme des procédés pour calculer l'aire indépendamment de toutes mesures.

Nous pointons à l'occasion l'importance des changements de cadres dans la constitution des connaissances : en effet nous avons essayé dans notre séance de faire basculer les étudiants du cadre algébrique où ils pensaient résoudre le problème (trouver une formule) au cadre géométrique, plus exactement à celui des grandeurs aires, puisque ce changement de cadres transforme la recherche en construction de surfaces de même aire, mais dont on sait calculer l'aire.

A l'occasion de la déformation du carré en losange dont un des angles devient très petit, nous soulignons que nous avons utilisé un changement de point de vue pour convaincre son auditoire : d'un point de vue statique, nous sommes passés à un point de vue dynamique, fabriquant ainsi des surfaces de même périmètre, mais d'aires de plus en plus petites (on pourrait aussi pointer le théorème des valeurs intermédiaires en acte). Nous signalons que cette erreur est courante chez les élèves et qu'il est licite de la provoquer pour la contrer plus efficacement.

Si les formules trouvées sont perçues dans un premier temps comme des méthodes de calcul d'aires, il est nécessaire de faire constater qu'elles sont aussi l'expression des relations mathématiques qui lient les différentes grandeurs : ainsi l'aire d'un rectangle, produit de ses deux longueurs, traduit une double proportionnalité de l'aire sur les longueurs : si on considère les rectangles dont une dimension est fixe (par exemple 10 cm), l'aire du rectangle est proportionnelle à l'autre dimension. Cette connaissance fait basculer les aires vers la proportionnalité.

Nous avons ainsi l'occasion de pointer les liaisons entre les différentes notions mathématiques : l'aire du rectangle est liée à la multiplication, les diverses relations qui lient longueurs et mesures sont plus compréhensibles si l'élève maîtrise des aspects de la proportionnalité, les changements d'unités donnent naissance à des listes de nombres proportionnelles.

La mesure des aires fournit un cadre propice à l'illustration de certaines propriétés : à titre culturel, nous pouvons présenter la version "mesure des aires" du théorème de Pythagore et proposer à la recherche ou à la méditation des découpages qui éclairent le théorème direct à défaut de le démontrer : l'aire du carré construit sur l'hypoténuse du triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

Il est aussi possible de profiter de ce cadre lié à la mesure des aires pour illustrer deux "égalités remarquables",$(a + b)^2$ et $(a -b)^2$ présentées sous forme de l'aire d'un carré de mesure de côté a + b (resp. a - b).

Là encore on peut montrer l'intérêt, pour l'apprentissage, de maîtriser des changements de cadres pour contrôler certains résultats, donc la nécessité pour le maître de préparer l'élève à utiliser ces changements de cadres, par le choix de situations appropriées.

D. Analyse du formateur

Cette séance d'homologie directe complète les connaissances des étudiants et leur permet de comprendre l'origine des formules ; beaucoup se rassurent seulement à ce moment tant ils étaient inquiets de ce passage obligé à un cadre algébrique pour de la géométrie. L'importance des changements de cadres nécessaires se trouve bien illustrée ici.

D'autre part et parce qu'elles s'expriment dans le cadre algébrique (survalorisé dans leur scolarité), les formules liées à l'aire leur semblent souvent le plus important à retenir sur les aires (c'est souvent la seule trace des aires dans les ouvrages communs), donc simultanément le plus important à enseigner. Il est, nous semble-t-il, utile que le formateur insiste continûment sur la nécessité de faire travailler dans un premier temps sur les grandeurs indépendamment des mesures et des formules, de telle sorte que celles-ci ne soient qu'un aboutissement de l'étude.

Le bilan fait avec les étudiants en fin de cours sur les aires montre qu'ils ont été rassurés de constater que les formules pouvaient s'expliquer. Ainsi cette séance, nous semble-t-il, joue un rôle important dans la conception de l'aire des étudiants. En effet, s'ils ont de diverses manières apprécié les découpages et comparaisons d'aires sans utiliser la mesure, ils ont quelquefois perçu ces situations comme uniquement pour la classe élémentaire, sans réel effet pour leurs propres connaissances, puisqu'ils ont réussi à traverser leur scolarité avec une conception erronée de l'aire. Par contre quand ils constatent que la progression utilisée leur permet de construire le formulaire, objet social reconnu entre tous pour symboliser les aires (ou au volume), de l'utiliser mais surtout de l'oublier, alors ils reconnaissent l'efficacité de la démarche. Iront-ils dans leur classe jusqu'à construire une situation qui permette aux enfants de construire le formulaire, nous ne pouvons l'assurer.

Une autre stratégie que l'homologie ne nous paraît pas envisageable pour cette construction des formules, justement parce qu'elle doit permettre un temps d'errements et de maturation, propice au jeu de cadre proposé par le formateur. Bien entendu une phase de transposition est nécessaire pour en extraire toute la moelle didactique.

VII.Quatrième séance

A. Objectifs

- Objectifs mathématiques
    - Evaluer les connaissances des étudiants ; leur permettre de faire un point mathématique sur les aires
    - Etendre les connaissances sur les aires aux volumes et autres grandeurs mesurables
    - Comprendre et relativiser le formulaire sur les volumes
- Objectifs didactiques
    - Montrer en quoi la progression sur les aires et leur mesure est exemplaire d'une progression sur une grandeur mesurable
    - Informer sur grandeurs mesurables et repérables à l'école
- Objectifs pédagogiques

  Replacer l'ensemble de l'étude dans le contexte des grandeurs enseignées à l'école.

B. Déroulement

Cette séance est simultanément une séance de réinvestissement où les exercices sur les aires (cf. annexe T, page 331) donnés à chercher à la maison sont repris et éventuellement corrigés, après une confrontation deux à deux pour échanges et régulations, et une séance d'informations.

Viennent d'abord des informations de nature mathématique sur la notion de grandeur, de grandeur mesurable et de grandeur repérable, la notion de mesure d'une grandeur, sur toutes les grandeurs enseignées à l'école : longueur, aire, volume, masse, capacité, durée, temps, température, angle.

Du côté didactique, nous reprenons brièvement a posteriori les grandes étapes de la progression sur les aires et la présentons comme un exemple possible pour une progression sur une grandeur mesurable, respectant la chronologie : construction d'une grandeur, travail sur cette grandeur de classement et de rangement, indépendamment de toute mesure, puis construction d'une mesure (définissant ces propriétés) liée au choix d'un étalon et utilisation de cette mesure ; puis justification de la nécessité d'unités universelles, introduction de ces unités et utilisation ; enfin construction de méthodes pour évaluer la mesure de grandeurs d'objets familiers, ce qui nous fait basculer du côté du mesurage, avec éventuellement la construction d'objets servant à mesurer. Nous énonçons pour chacune des grandeurs quels peuvent être les objets physiques que nous cherchons à comparer, et par quels moyens. Un renvoi aux livres ERMEL est conseillé.

Cette séance respecte une stratégie culturelle pour les mathématiques et une stratégie de transposition pour les connaissances liées à l'acte d'enseigner. Elle répond souvent à des questions d'étudiants de nature plus mathématique que didactique, notamment des demandes de précisions sur les unités de volume, les formules sur les volumes trouvées dans le formulaire, le passage des unités de capacité usuelles à celles de volume usuelles.

C. Analyse des exercices et procédures rencontrées

L'objectif de l'exercice 1 est de contrôler la disponibilité des compétences de construction des étudiants pour produire des surfaces de même aire et de formes imposées. Il se résout dans un cadre géométrique.

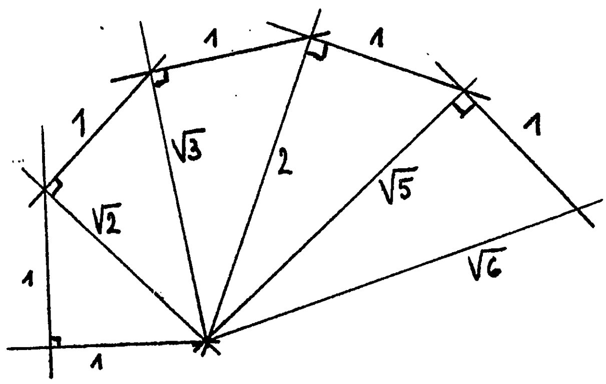
L'exercice 2 leur permet de constater les relations entre agrandissement de longueurs et agrandissement d'aires. Il se résout dans un cadre algébrique.

L'exercice 3, du même type que le précédent, les amène à lire les formules sur les volumes et à transférer avec des modifications les remarques constatées sur les aires et les agrandissements.

Les étudiants n'ont pas rencontré de difficulté particulière pour ces trois exercices ; c'est l'occasion pour nous de préciser les relations entre les formules et l'éventuelle proportionnalité entre l'aire et l'une des longueurs. L'expression "figure deux fois plus grande", de la langue courante et utilisée par les élèves (et les étudiants) prouve son ambiguïté, puisque le mot grand ne précise pas la grandeur de référence : un rectangle deux fois plus grand qu'un rectangle donné peut être ce rectangle à l'échelle 2, auquel cas son aire est quadruple, ou un rectangle non semblable à celui de départ, de longueur (ou bien de largeur) double de celle de départ, et donc d'aire double.

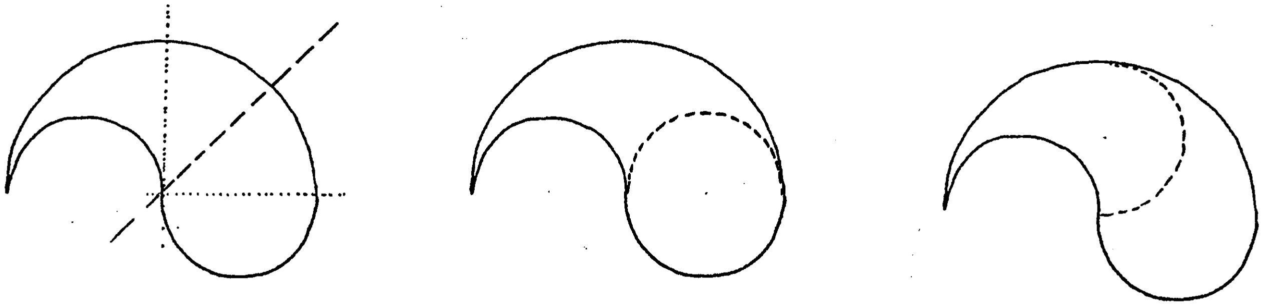
L'exercice 4 sert à pointer la fonctionnalité du changement de cadres, liée à la recherche de l'expression de la longueur de la diagonale d'un carré : les étudiants ont presque tous trouvé un procédé de construction, certains par un calcul préalable (recherche de la longueur du côté correspondant à un carré d'aire 8 cm^2), d'autres partageant par les diagonales le carré de départ et assemblant huit triangles rectangles superposables à ceux obtenus en un carré. La conclusion, que la diagonale du carré de départ fournit le côté, d'un carré d'aire double est acceptée par tous, mais n'est pas mise immédiatement en relation avec le théorème de Pythagore.

Les prolongements possibles, non évoqués, seraient la construction de la "spirale des irrationnels" (cf. ci-dessous), leur permettant d'obtenir la suite des nombres racines carrées d'entiers.



L'exercice 5 teste leurs aptitudes à réinvestir le partage de surfaces non rectangulaires en deux surfaces de même aire. La surface a est partagée par tous par son axe de symétrie. Les étudiants partagent correctement les surfaces b *et* c, mais un quart environ ne sait justifier le partage, soit par l'utilisation de la formule liée à l'aire d'un triangle, soit par la construction des médianes du rectangle obtenu par complétion par symétrie centrale du triangle de départ (les médianes et les diagonales du rectangle permettent par symétrie axiale et centrale de repérer les surfaces de même aire). A cette occasion, nous pointons à nouveau l'aspect outil des transformations, pour comparer des aires.

La surface d reste la grande perdante, si un quart des étudiants a une idée du partage, aucun ne peut le justifier : la correction fait apparaître un demi-disque de rayon a (à gauche), un quart de disque de rayon $2a$ (au dessus) d'aire double, et une surface d'aire égale à celle du demi-disque de rayon a. Ce qui donne comme exemples de lignes de partage (entres autres), la demi-droite bissectrice intérieure du quart de disque cité ci-dessus, ou un demi cercle de rayon a, intérieur à la surface, passant par le centre du disque de rayon $2a$.



L'exercice 6 ne pose pas de difficulté, il montre l'intérêt de la formule de l'aire d'un triangle, plus exactement le rôle du couple (hauteur, base).

L'exercice 7 pose quelques difficultés, il montre l'avantage de l'additivité des aires, qui permet de prouver une égalité d'aires en jouant sur somme et différence d'aires.

Rappelons qu'il s'agit de la version rectangle de la proposition I, 43 des *Elemens* d'Euclide[154].

L'exercice 8 est un calcul numérique, lié à une unité imposée. Il permet soit d'utiliser des découpages du carré en sous-surfaces, soit de le paver par neuf carreaux élémentaires et d'exprimer la surface demandée avec ces carreaux.

D. Notre bilan en tant que formateur

Ce bilan est étayé par les échanges avec les étudiants et leurs questions.

La plus grande difficulté rencontrée par les étudiants dans la résolution de ces exercices est la nécessité d'un changement de cadre, notamment dans les exercices 4 et 5.

Dans l'exercice 4, bien que l'exercice se pose dans un cadre géométrique, la tendance naturelle est de se précipiter sur des calculs numériques pour apprécier le degré de faisabilité de l'exercice. Quand la valeur numérique n'est pas suffisamment familière (c'est-à-dire non décimale avec moins de trois chiffres après la virgule), les étudiants se persuadent souvent que la méthode employée n'est pas la meilleure et essaient seulement alors de changer de cadre ; mais la valeur numérique joue alors quelquefois un rôle perturbateur, dans la mesure où ils cherchent à la retrouver. Ceux qui directement s'étaient placés dans un cadre géométrique, en doublant l'aire du carré de départ, y compris en passant par un rectangle, ont souvent mené à bien l'exercice par un puzzle du carré d'aire double.

L'exercice 5 posait spécifiquement ce problème de changement de cadre : en effet un cadre strictement géométrique suffisait pour conclure directement pour la surface a, aussi moins

[154] Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux.

directement pour la surface b (par tracé d'une médiane) : cet exercice permettait de citer la propriété qu'une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.

La surface c, bien que proche de b, nécessitait des connaissances plus évoluées sur l'aire (une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire), fondées soit sur le constat antérieur de cette propriété, soit sur un réinvestissement de la formule de l'aire d'un triangle (donc un cadre plus algébrique).

Pour la surface d, le cadre algébrique (connaissance de la formule de l'aire d'un disque) est bien commode, mais il n'est pas indispensable : en effet, par des considérations de symétrie, il est possible de se convaincre que le quart du disque de rayon 2 a a même aire que le complément de ce quart de disque par rapport à la surface entière, donc la moitié de l'aire de la surface totale, et comme le demi-disque de rayon a a une aire qui est le quart de l'aire totale (c'est la réduction à l'échelle 1/2 du grand demi-disque), il est facile de tracer une ligne de partage convenable.

Ces exercices jouent le rôle dans la progression avec les étudiants d'une évaluation formative, et permettent simultanément de compléter les connaissances mathématiques et didactiques. Ils ont donc servi à préciser à nouveau, au niveau mathématique, les propriétés de l'aire fonctionnelles pour la comparaison d'aires (additivité et invariance par isométries et certaines autres transformations), le lien entre les rapports de mesure et les rapports d'aire, et au niveau didactique, l'importance des changements de cadres pour l'appropriation des connaissances.

VIII.Etude comparée de manuels de CM1 sur l'aire

Les trois manuels choisis pour l'étude sont les suivants (cf. annexe U, page 332) :
- *Math Outil* CM1, 1990, Ed Magnard, pages 176 à 179 (le manuel comporte 191 pages).
- *Objectif Calcul* CM1, 1987, Ed Hatier, pages 190 à 193 (le manuel comporte 223 pages).
- *Math et Calcul* CM1, 1987, Ed Hachette, pages 164 à 167 (le manuel comporte 191 pages).

La séance est construite avec une stratégie d'homologie, avec un objectif de réflexion pédagogique et didactique, puisqu'il s'agit d'examiner les leçons sur les aires dans trois manuels à la lumière de ce que nous avons déclaré sur les aires. Il s'agit donc d'une homologie-action.

Plusieurs phases sont prévues :

- une première où les étudiants par groupes de quatre répondent aux questions qui les amènent à analyser les trois manuels ;
- une deuxième où chaque groupe choisit un représentant chargé de présenter à la classe les conclusions du groupe ;
- une troisième où le formateur essaie d'analyser et de mettre en contradiction, si cela n'a pas eu lieu lors de la synthèse les opinions prônées, puis de présenter, si ce n'est apparu lors de la discussion, ce qui serait cohérent avec les hypothèses développées dans la progression menée sur les aires. Il pointe aussi la pertinence de notions didactiques déjà rencontrées pour différencier les exercices proposés : rôle des variables didactiques (ici du côté des supports ou des consignes), statut de savoirs en jeu dans les tâches demandées (savoir outil ou savoir objet), et le rôle joué dans l'enseignement par la dialectique entre ces deux aspects du savoir.

Les livres sont brièvement présentés au niveau de la structure d'une leçon, sans préjuger du temps pour la traiter :
- pour l'extrait 1, une partie *Activités préparatoires*, puis une partie *Exercices* suivie d'un *Mémento*, sur une double page ;
- pour l'extrait 2, une partie *Calcul rapide* (qu'on étudiera pas), une partie *Découverte* suivie d'un *Aide-mémoire* et une partie *Exercices*, pour une double page ;
- pour le troisième extrait, une section *Recherche* suivie d'une section *Applications*, puis *Problèmes*, sur deux doubles pages .

On supposera que la partie *Activités préparatoires* ou *Découverte* ou *Recherche* donne lieu à une synthèse collective et que la partie *Exercices, Applications*, *Problèmes* est individuelle.

La consigne de travail est la suivante :
"Voici trois extraits de manuels de CM1. L'objectif de ce travail est de vous faire analyser et comparer la première séance sur les aires de chacun de ces manuels (la deuxième leçon vous est donnée à titre indicatif).

Les questions suivantes vont vous aider à affiner votre analyse. Ecrivez vos réponses justifiées sur une feuille qui représentera l'avis du groupe. Une confrontation des avis nous aidera à préciser les différences et les analogies."

Les questions sont inscrites au tableau.
1 - L'activité de départ est-elle une activité de recherche ? Pourquoi ?
2 - Quelles sont les tâches des élèves dans la partie *Activités préparatoires* ou *Découverte* ou *Recherche* ? Quelles sont-elles dans les exercices ?
3 - Quelle vision de l'aire est générée par la première leçon de chaque manuel ? Comment ? Est-elle adaptée à ce que vous savez de l'aire ? Quels en sont les manques ?
4 - Une erreur mathématique subsiste dans le premier extrait. Trouvez la.

5 - Ces leçons vous paraissent-elles en accord avec les hypothèses actuelles sur l'apprentissage et l'enseignement des aires à l'école ? Pourquoi ?
6 - Piste de réflexion : vous arrivez dans une classe dont les élèves utilisent ce manuel ; quelle utilisation en faites-vous dans votre progression sur les aires ?

IX. Bilan sur la mesure

Pour leur permettre d'avoir une indication sur leurs compétences dans ce domaine, et mieux cerner l'impact des quelques séances consacrées à ce thème, nous avons demandé à des étudiants volontaires sur deux groupes, soit environ 45 personnes, de remplir un questionnaire à l'issue de la dernière séance. 36 ont accepté, certains devant partir car cette demande était placée hors cours, de façon à ne pas les léser de leurs derniers temps de questionnement avant le concours. Ils y ont consacré entre 45 minutes et une heure et ont travaillé sans document.

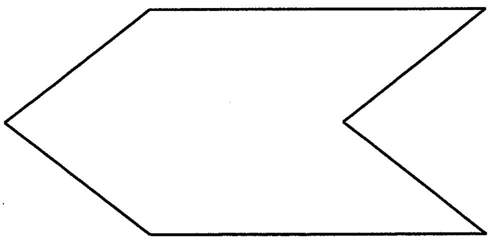
Nous n'avons, par contre, pas pu mesurer leurs performances aux épreuves du concours : le concours de l'académie de Rouen de 1994 ne portait pas du tout sur la mesure.

Le questionnaire (cf. annexe V, page 335) comporte deux parties, la première destinée à tester leur connaissance mathématique de la mesure des aires, la seconde à évaluer l'effet de notre formation sur leurs façons de concevoir l'aire et son enseignement, sachant pertinemment que nous avions peu traité la mise en regard de nos conseils sur ce thème et ceux des différents manuels scolaires, séance ordinairement prévue dans notre progression sur les aires, mais qui n'a pu être menée dans les délais impartis.

A. Bilan mathématique

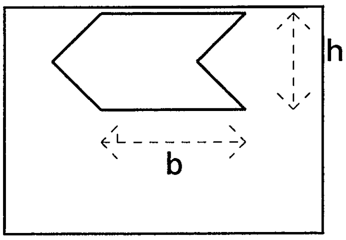
Première question

Préparez le calcul de la mesure en cm^2 de l'aire de cette surface.



Cet exercice n'offre pas de difficulté particulière. Il teste l'aptitude de l'étudiant à recomposer la surface pour obtenir un calcul d'aire immédiat. Il a été bien réussi, malgré trois réponses fausses, dont deux sans doute par étourderie.

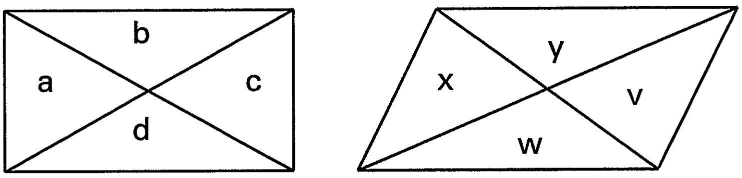
Les réponses se répartissent de la façon suivante :



- 27 étudiants transforment la surface en un rectangle de dimensions b par h, par translation horizontale de longueur b du triangle isocèle de gauche vers la droite ;
- 6 étudiants découpent la surface en deux parallélogrammes symétriques ;
- un étudiant voit l'aire de la surface comme différence entre l'aire du rectangle et l'aire du triangle isocèle "qui en constitue la pointe" (incorrect) ;
- 2 étudiants donnent comme réponses b^2, ayant sans doute mal apprécié le fait $b \neq h$ (incorrect).

Deuxième question

Comparez les aires a, b, c et d entre elles, puis les aires x, y, v et w entre elles. Justifiez.



L'exercice propose des surfaces isométriques (*a et c* , *b et d*, *x et v* , *y et w*), donc de même aire, et des surfaces de formes différentes et pourtant de même aire (par exemple *a et b*). Pour le rectangle, la résolution peut :
- s'appuyer sur un cadre numérique uniquement, la formule de l'aire du triangle appliquée aux triangles de la figure et le constat (s'appuyant sur une propriété géométrique du rectangle, le centre du rectangle est milieu de chaque diagonale et de chaque médiane) que la hauteur de l'un est la moitié de la base de l'autre tandis que sa base est le double de la hauteur de l'autre ;

- utiliser un cadre géométrique : constater l'égalité des aires de a *et* b en traçant les médianes du rectangle et en utilisant la diagonale des petits rectangles pour justifier l'égalité des moitiés d'aires a *et* b .

Pour le parallélogramme, le cadre géométrique fonctionne (si on connaît la propriété une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire, propriété que l'on peut retrouver de façon algébrique) : les médianes du parallélogramme permettent comme pour le rectangle partagent les triangles en triangles d'aires moitiés des triangles de départ, et la diagonale du parallélogramme, droite ayant un centre de symétrie justifie l'égalité des aires des triangles moitiés de part et d'autre de la diagonale.

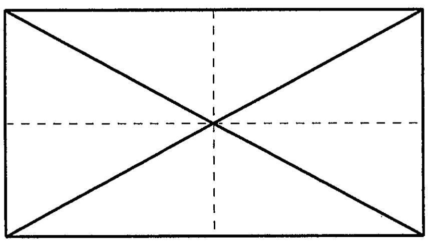
La comparaison des hauteurs des triangles dessinés par contre est plus complexe et utilise le théorème de Thalès, plus difficilement disponible chez les étudiants.

La question sur le rectangle est plus complexe que la première question du bilan, puisqu'elle nécessite de croiser plusieurs égalités et de réorganiser la figure de deux façons différentes.

La question sur le parallélogramme est donc plus difficile, et peut troubler les étudiants puisqu'elle ne permet pas l'extension apparemment implicite de la procédure numérique.

Pour le rectangle, 17 réponses sont exactes et justifiées :

- 3 par le fait qu'un triangle a, b, c ou d représente en aire, le quart de celle du rectangle, par des considérations de base et de hauteur, respectivement côté et demi-médiane du rectangle ;
- 10 en dessinant effectivement dans le rectangle les médianes et en constatant l'égalité des aires des triangles rectangles obtenus deux à deux par des considérations de symétrie (symétrie axiale dans les triangles, symétrie centrale dans les rectangles) ;



- 4 justifiant les égalités d'aire de b et d par superposabilité et celle de a et b par des considérations de hauteur et de base.

Tous les autres étudiants (soit 19) ont au minimum signalé l'égalité des aires de b et d, puis de a et c. Tous l'ont justifié sauf un étudiant, 9 par superposabilité, certains par un système de deux équations à quatre inconnues

$b + c = a + d$ et $a + b = d + c$.

De ce système, 5 ont aussi déduit l'égalité des quatre aires, déduction incorrecte.

Finalement 19 n'ont pas justifié correctement les deux autres égalités, $a = b$ et $d = c$.

Pour le parallélogramme, 10 étudiants ont écrit et justifié leurs réponses, globalement par des considérations du même type que celles sur le rectangle, quand celles-ci restaient valides. Des erreurs de vocabulaire apparaissent (il est question de "l'axe de symétrie du parallélogramme").

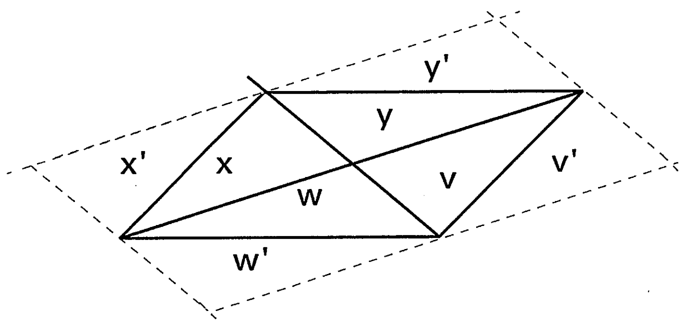
Les égalités des aires x et v d'une part et y et w d'autre part sont signalées par tous, pas toujours bien justifiées.

Une erreur courante (6 étudiants) est d'avoir assimilé le parallélogramme fourni à un losange, ce qui leur permet des justifications par l'égalité des longueurs des côtés.

Une justification a été faite par extension du parallélogramme :

$x + x' = y + y' = v + v' = w + w'$ comme quart du grand parallélogramme

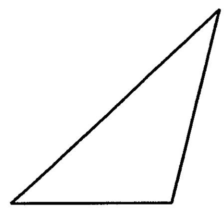
et comme $x = x'$ etc., les quatre aires sont égales.



Troisième question

Dessinez successivement

- un triangle B, d'aire double de celle du triangle donné A,
- un triangle C, d'aire moitié de celle du triangle donné A.



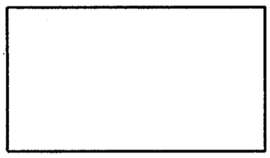
Cette troisième question peut se résoudre dans un cadre géométrique, par la propriété signalée de la médiane ou dans un cadre algébrique, par l'utilisation de la formule traditionnelle de l'aire d'un triangle.

Cette question est réussie par tous sauf deux étudiants, par des procédés qui se répartissent ainsi :

- pour B et C le tracé de la hauteur intérieure au triangle et la construction d'une base double ou moitié (3 étudiants) correspondante ;
- pour B et C le tracé d'une hauteur extérieure au triangle et la construction d'une base double ou moitié (15 étudiants) correspondante ;
- pour B le tracé d'une hauteur extérieure au triangle et la construction d'une base double ; pour C le tracé d'une médiane du triangle de départ (4 étudiants) ;
- pour B le tracé d'une hauteur extérieure au triangle et la construction d'une base double ; pour C la construction d'une hauteur moitié en conservant la même base (2 étudiants) ;
- 6 étudiants dessinent une médiane du triangle de départ pour C et doublent le côté inférieur en conservant le troisième sommet pour B ;
- 4 étudiants tracent un parallélogramme par symétrie centrale du triangle de départ par rapport au milieu d'un côté et utilise le partage de ce parallélogramme pour marquer B et C ;
- les procédés erronés :
    - un étudiant dessine des triangles au hasard ;
    - un autre trace comme hauteur la perpendiculaire au côté inférieur issue du sommet inférieur droit et se fonde sur cette hauteur pour doubler et partager en deux le côté inférieur.

Quatrième question

Dessinez une surface J de même aire que le rectangle donné mais de périmètre plus grand,
une surface K de même périmètre que le rectangle donné mais d'aire plus grande.



Cette question teste l'aptitude à concevoir la déformation d'une surface conservant l'aire ou le périmètre. Si la construction de J est relativement facile, celle de K nécessite une réflexion plus poussée, notamment l'agrandissement de l'aire sans varier le périmètre, c'est à dire vers l'optimisation de l'aire à périmètre fixé.

Les procédés mis en oeuvre pour J, tous corrects sont les suivants :
- 6 étudiants construisent un rectangle correct, en s'aidant des mesures effectives ;
- 7 construisent un triangle en juxtaposant deux triangles rectangles, d'aire moitié de celle du rectangle ;

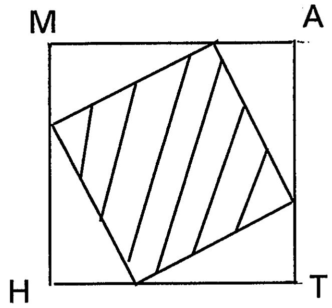
- 18 inventent une surface limitée par une ligne brisée fermée à la manière de la fractale évoquée dans les leçons antérieures ;
- 3 étudiants dessinent un parallélogramme ;
- 1 étudiant fait une surface du type de celle du premier exercice du questionnaire ;
- 1 étudiant propose deux demi-rectangles, accolées par un sommet (proposition considérée correcte à la limite).

Les procédés mis en oeuvre pour K se répartissent ainsi :

14 seulement sont corrects et s'appuient sur l'utilisation des mesures ; 5 étudiants proposent des surfaces fausses, principalement parce qu'elles n'ont une aire plus grande ; 8 étudiants déclarent que cette question est impossible et 7 ne répondent pas.

Cinquième question

MATH est un carré dont tous les côtés ont été équitablement partagés en trois. Quelle fraction de l'aire du carré représente la surface hachurée ?



Cette question évalue l'aptitude à construire un étalon pour évaluer une mesure d'aire.

Tous fournissent une réponse exacte 5/9 (sauf 3 qui ne terminent pas leurs calculs) par les procédés suivants :
- par le calcul de la longueur du côté du carré hachuré grâce au théorème de Pythagore (5 étudiants) ;
- par le quadrillage en neuf carrés du carré de départ et
  - l'évaluation de l'aire hachurée, par compensation (13 étudiants),
  - ou l'évaluation de l'aire non hachurée, puis le complémentaire par rapport au carré (3 étudiants) ;
- par le calcul de l'aire d'un des triangles blancs, puis de toute la surface blanche, puis du complémentaire (12 étudiants).

Remarque : les étudiants qui n'ont pas quadrillé le carré sont passés par un codage algébrique du côté du carré pour exprimer leurs longueurs.

B. Analyse de l'ensemble des réponses sur la partie mathématique

Résumons le nombre de bonnes réponses par question.

Question 1	Question rectangle	2 parallélogra	Question 3	Question J	4 K	Question 5
33	17	10	34	36	14	36

Globalement d'assez bonnes compétences sur les aires, une certaine difficulté à utiliser encore la symétrie comme outil de comparaison, mais des efforts pour se libérer des mesures.

Les questions 1, 3, 4 pour J, et 5, sont satisfaisantes, surtout dans la mesure où elles montrent des procédures qui se libèrent de la mesure des longueurs pour se consacrer à la globalité des aires.

La question 2 offre des résultats décevants sans doute dus à deux difficultés :
- celle de concevoir les sous figures qui permettent le raisonnement dans une figure globale,
- celle de tenir disponibles suffisamment de méthodes permettant de comparer les aires, que ce soit dans un cadre géométrique ou dans un cadre algébrique.

Nous avons deux hypothèses pour expliquer le peu de réponses correctes (le reste étant essentiellement des non-réponses ou un "impossible") à l'exercice 4 pour K :
- première hypothèse, une rupture de contrat de notre côté : en effet, en cours nous avions pointé l'effet d'une déformation continue du rectangle en parallélogramme de même périmètre qui diminuait l'aire, la question portait sur une conservation du périmètre liée à une augmentation de l'aire,
- seconde hypothèse, les surfaces liées à la fractale donnent des exemples d'aire constante et de périmètres aussi grands que possible, du fait de l'existence d'une surface de cette famille de périmètre infini ; l'idée d'une surface de périmètre fixe et de surface infinie leur paraissant paradoxale, à juste titre, ils en ont déduit l'impossibilité d'agrandir l'aire en conservant le périmètre.

Il est vrai aussi que cet exercice leur demandait d'utiliser des méthodes de conservation du périmètre, qui n'ont pas été spécifiquement évoquées dans le cours. On peut d'ailleurs se demander si leur conception de la longueur n'est pas effectivement en cause dans cet exercice.

En conclusion, il nous paraît souhaitable que les étudiants continuent à travailler sur des exercices qui, pour leur résolution, nécessitent des changements de cadres. Leur pertinence dans le domaine de la mesure est particulièrement sensible, ce qui n'est pas étonnant, compte-tenu du "pont" entre le numérique et le géométrique que représente la mesure.

Des exercices nécessitant de conjuguer plusieurs propriétés sur les aires (additivité, transformations qui conservent l'aire, etc.) leur seraient aussi profitables.

C. Bilan plus didactique et pédagogique

Sixième question

La suite de séances sur les aires et leur mesure ont-elles changé votre perception et votre connaissance mathématique de l'aire ? (oui, non, en quoi, pourquoi)

Elle cherchait à pointer ce qui a le plus marqué les étudiants dans leur apprentissage sur les aires et leur mesure. Les réponses étaient volontairement laissées libres pour permettre de pointer l'impact immédiat.

Sur les 36 questionnaires, 3 ne répondent pas à cette question, 4 répondent non, 3 parce qu'ils n'ont pas appris du nouveau (ou très peu), 1 parce que l'occasion de donner des cours individuels de mathématiques lui a permis d'avoir ces connaissances.

Les 29 autres répondent donc oui, en détaillant leur réponse de la manière suivante (nous avons fait figurer plusieurs nuances, d'où une somme des réponses supérieure à 29) :

25 expriment qu'ils ont accru leurs connaissances mathématiques sur l'aire
- 12 citent leur soulagement de pouvoir retrouver les formules plutôt que de les savoir par coeur, alors qu'ils n'imaginaient pas qu'on puisse les retrouver si "simplement" ; une citation d'étudiant "avant les formules ne me parlaient pas" ;
- 5 citent leur "découverte" : les aires de deux surfaces de formes différentes peuvent être les mêmes ;
- pour 6 autres, le plus nouveau a été la différentiation aire-périmètre ; l'une ajoute même "ça paraît tellement évident après !"
- 1 précise qu'il a appris parce que ses connaissances en la matière étaient limitées...
- 1 autre qu'il a appris des méthodes pour aborder l'aire ;

13 déclarent que leur conception de l'enseignement de l'aire ont changé
- 11 expliquent que pour eux, l'aire était attachée à la mesure, aux formules ; 3 précisent qu'il n'y avait pas de place pour les manipulations dans leur scolarité ;
- 2 indiquent l'influence des premières séances sur leurs conceptions : les découpages et les manipulations leur ont fait découvrir qu'on pouvait comparer par déplacement, par recouvrement,...

L'un enfin déclare : "oui, dans la mesure où j'avais une perception de la géométrie davantage analytique. Le fait de s'intéresser uniquement à l'aspect géométrique (report des angles, des longueurs, axes de symétrie,...) ne m'était pas familier."

Conclusion

La dernière citation me semble bien résumer les modifications des conceptions des étudiants : habitués à manier les aires dans un cadre exclusivement numérique (calculs effectifs d'aires), voire algébrique (connaissance et application des formules), ils ont découvert que ces grandeurs relevaient aussi d'autres cadres notamment géométriques, et que ce cadre géométrique était quelquefois relayé par des connaissances spatiales, ce qui permettait une plus grande "sensibilité" (du côté du sensuel et du sens) à la notion.

Une telle suite de situations nous apparaît donc relativement pertinente pour sensibiliser les étudiants à la notion de cadre et à l'importance des jeux de cadres dans les apprentissages, plus particulièrement les réapprentissages.

Septième question

Vous sentez-vous plus armé(e) pour enseigner (en utilisant des manuels, votre cours, etc..)
- l'aire au CM ? (oui, non, en quoi, pourquoi)
- une autre grandeur (longueur, volume, masse,...) de l'école ? (oui, non, en quoi, pourquoi)

Parmi les 36 étudiants, 2 ne répondent pas à cette septième question, et 2 répondent non à la première partie (sur l'aire), indiquant qu'il manque une étude des progressions proposées dans les manuels pour l'un et pour l'autre que le thème reste encore à approfondir.

Les 32 autres répondent oui à la question sur l'aire, dont
- 18 qui écrivent avoir été sensibles l'approche qui leur donne l'idée d'une démarche (plus "sensitive" pour l'un, à compléter par des manuels pour l'autre),
- 3 qui prennent des indices sur ce qu'ils ont ressenti en situation,
- 2 qui expriment que les aspects manipulation et découverte par soi même sont plus formateurs,

- 1 qui précise qu'il n'a plus peur, 1 autre que "tout est clair", 1 troisième qui est prêt à commencer par les "aires les plus faciles" (sic !), 1 dernier qui peut enfin reconstituer les formules[155]

Notons que l'étudiant qui avait des connaissances suffisantes sur l'aire grâce aux cours de mathématiques qu'il avait donnés précise qu'il a pris conscience de la distinction entre "connaître des mathématiques" et "les enseigner" ; il répond d'ailleurs oui à cette septième question.

En ce qui concerne la deuxième partie de la question, les réponses sont plus variées. Seulement 17 étudiants pensent être plus armés pour une autre grandeur, moyennant des transferts de la démarche mise en place sur les aires.

8 mentionnent qu'ils se sentent incompétents sur les volumes et les capacités, dont on n'a pas assez parlé en cours, qu'il s'agisse des contenus mathématiques ou pédagogiques. Un étudiant indique que pour lui la transposition est vague, un autre que la démarche est pour lui trop attachée aux aires, un dernier enfin donne un oui théorique, modulé par son manque d'expérience au niveau de la pédagogie.

Il est bien entendu qu'autant nous attendions (espérions) une plus grande assurance sur les aires, autant nous aurions été inquiets de voir nos étudiants prêts à enseigner toute autre grandeur. En effet par le choix d'un exemple, nous souhaitons les rendre réceptifs à la démarche globale d'enseignement sur les grandeurs, sachant bien qu'une réflexion spécifique sur chacune des grandeurs est nécessaire avant l'idée d'un enseignement.

Il nous semble que le nombre d'étudiants conscients d'avoir simultanément enrichi leurs connaissances sur l'aire et son enseignement permet de tirer un bilan immédiatement après coup plutôt positif.

Huitième question

Que vous manquerait-il encore comme informations pour - enseigner l'aire au CM ? - enseigner une autre grandeur de l'école ?

14 étudiants n'ont pas rempli cette rubrique et vraiment très peu ont complété la seconde partie de la question. Nous nous contenterons donc d'analyser la première partie.

---

155 On peut se demander si cette peur des formules n'est pas une perversion due à la présence du concours en première année. En effet dans leur vision a priori de l'aire, les formules occupent une place capitale, un de leurs objectifs (de concours) est donc de les retenir, le constat qu'ils pourront les retrouver les rend très reconnaissants au formateur car ils y englobent toute la connaissance de l'aire.

Les 22 étudiants qui ont répondu se partagent ainsi :
- pour 3 étudiants (ayant répondu positivement à la question 6), il ne manque aucune information,
- 4 étudiants écrivent ne pas manquer d'informations, mais de pratique,
- 1 souhaite un entraînement sous forme d'exercices,
- 2 autres souhaitent d'autres exercices de manipulation, sans préciser leur destination, eux ou les élèves,
- le reste des étudiants, soit 12, souhaite des compléments plus didactiques ou pédagogiques :
  - 4 citent une étude des progression des manuels, 1 une analyse des exercices,
  - 3 un aperçu des conceptions des élèves a priori pour voir "ce qu'il faut changer",
  - 3 un aperçu sur les difficultés que ressentent les élèves et sur comment y remédier,
  - 1 des exercices d'application pour les enfants,
  - 1 voudrait savoir comment expliquer pourquoi on met deux chiffres par colonne, 1 autre le changement entre mètre et mètre carré.

Les attentes didactiques des étudiants sont essentiellement sur l'analyse des outils à leur disposition pour enseigner : manuels scolaires avec leurs exercices. Il est certain que la progression proposée a peu pris en compte explicitement cette relation avec les écrits du terrain et donc, à juste titre, elle est réclamée par les étudiants. Une autre demande nous paraît intéressante : celle demandant des informations sur les conceptions a priori des élèves pour penser l'enseignement. Il est vrai aussi que lors de l'étude des autres thèmes, nous avons traité ces deux aspects : étude des manuels, notamment des premières leçons et des progressions suggérées, analyse de productions d'enfants sur des problèmes relevant du thème. Les étudiants ont pu se créer une conception du nécessaire de formation incluant ces deux aspects (c'est un phénomène de contrat didactique), mais cela n'implique pas qu'ils les considèrent indispensables à l'exercice de leur futur métier-.

D. Conclusion

Ce questionnaire situé immédiatement après la suite des séances sur les aires et fermant l'ensemble des cours dispensés en PE1 peut paraître quelque peu ambitieux. Il n'a cependant comme objectif que, d'une part évaluer la disponibilité relative de quelques connaissances des étudiants sur les aires, d'autre part avoir une idée de l'impact que peuvent avoir de telles démarches sur leur conception de l'enseignement.

Il est bien entendu qu'il ne faut accorder à ce bilan qu'une portée relative, il est hors de question d'imaginer que tous les étudiants qui se sentent armés réussiront leur progression sur les aires dans une classe. Cependant il permet de donner au formateur dans l'immédiat l'impression d'une certaine efficacité au moins au niveau de la démarche mise en place. Les étudiants ont été sensibles (et simultanément sensibilisés) à la mise en situation, à la construction de leurs propres outils de résolution et ont apprécié, cognitivement, la mise en scène, du côté certes de l'apport des connaissances mathématiques, mais aussi du côté de la démarche à mettre en place à l'école.

Cette démarche peut être mise en relation avec les enseignements sur le thème qu'ils ont reçus antérieurement : cet enseignement a développé en eux certes des compétences, mais a laissé place à des conceptions erronées sur l'aire et sa mesure. L'enseignement préconisé essaie d'éviter la permanence de ces conceptions erronées en les prenant en compte dans l'apprentissage. Ces propositions intègrent les risques d'erreurs pour les nouveaux apprenants puisqu'elles les mettent en situation de conflit, par l'action, puis la formulation, avec leurs conceptions erronées (surfaces dont on fait varier le périmètre -resp. l'aire- tout en conservant l'aire -resp. le périmètre-, surfaces de formes très différentes mais de même aire prouvée, etc.). En même temps elles donnent l'occasion de "réparer ses connaissances" tout en comprenant ses erreurs par la prise de sens que permettent les situations.

En résumé, il nous semble que les étudiants peuvent être relativement convaincus de certains avantages de ces démarches pour la construction des connaissances à l'intérieur d'une classe.

En ce qui concerne leurs demandes de compléments, on peut bien sûr constater que la séance prévue dans la progression initiale, une étude comparée de différents manuels sur l'introduction des aires, fait défaut et qu'elle aurait sans doute permis une liaison plus sûre avec des éléments de pratique.

Il nous semble donc que la portée des stratégies d'homologie se fait sentir au moins dans le très court terme, puisque globalement l'ensemble des étudiants a simultanément une vision plus claire de l'aire et de son enseignement, avec une démarche que nous souhaitons voir mise en place dans les classes. Mais ces séances ne peuvent se concevoir sans de nécessaires phases de transposition.

Bien entendu, et d'autant plus que nous n'avons pris le temps de la confronter à d'autres démarches et ce, par exemple, via l'étude des manuels, les étudiants, à ce stade de leur formation, ne nous semblent pas encore mûrs pour enseigner les aires et leur mesure. Au minimum une séance de type transposition devrait mettre à l'épreuve leurs jeunes nouvelles conceptions et leur résistance au retour des anciennes matérialisées dans les manuels ou les pratiques de certains maîtres.

Pour ce qui est du long terme, il nous est bien sûr impossible de nous prononcer. Cette évolution de leurs conceptions sur la notion d'aire et son enseignement nous paraît cependant indispensable pour qu'il en subsiste quelques effets dans leurs pratiques pédagogiques futures, quelles que soient les régulations que leur apportera le "terrain".

Conclusion

Cette deuxième partie nous a permis de dresser **un état des pratiques des formateurs du premier degré en mathématiques**, sur les points suivants.

Contrairement à l'hypothèse que nous avions formulée, suite à l'analyse de l'ordre dans lequel nous avions présenté les thèmes mathématiques de formation lors de nos premières années d'exercice, il n'existe pas d'ordre de présentation des thèmes commun aux formateurs. Mais certains thèmes sont plus souvent traités que d'autres, lors d'une première année de formation avec concours. Ce sont : la géométrie plane, puis les fonctions numériques, puis le nombre entier au même rang que la division, enfin les rationnels et décimaux. Et un grand nombre de formateurs déclarent adopter un ordre différent en cas d'absence de concours en fin de première année.

L'analyse de notre pratique nous avait sensibilisés à l'existence d'une relation entre thème et stratégie ; une étude détaillée des habitudes de formation (étudiées à partir des écrits publiés) sur deux thèmes , la division et la proportionnalité, nous a montré qu'ils ne relevaient pas des mêmes traitements stratégiques : la division se prête à toutes les stratégies et peut même se traiter de façon relativement unitaire, on trouve seulement des stratégies d'homologie (avec un peu de transposition) pour la proportionnalité. Mais, pour la division, nous préférons utiliser des stratégies d'homologie.

Une extension de l'étude précédente (recherche des relations entre thème et stratégie) à tous les thèmes de formation dans des écrits spécifiques (ceux qui portent l'expérience des écoles normales) nous a permis de classer les thèmes en quatre blocs :

Thèmes	nombre entier, addition, soustraction, multiplication	géométrie, mesure, fonctions numériques	non entiers	division
Stratégies	transposition et monstration	homologie (avec éléments de transposition)	culturel mathématique, transposition, homologie	toutes les stratégies

Ce classement nous a amené à formuler des hypothèses sur l'efficacité des stratégies en formation, plus exactement sur le type de liaison entre thème et stratégie : l'homologie serait plus convaincante en première année, pour un thème méconnu mathématiquement des étudiants ; la transposition et la monstration seraient plutôt des stratégies de seconde année, ou pour un public déjà rodé à la pratique effective, et pour des thèmes sur lesquels les formés savent des mathématiques.

En détaillant l'exemple d'une progression que nous avons menée avec des étudiants sur la mesure, nous avons illustré le traitement homologique d'un thème et l'efficacité que nous visons pour une première année de formation. Nous avons ainsi donné ainsi l'exemple d'une ingénierie sur un thème, à partir de son rang dans le projet global de formation.

L'ensemble de cette étude a construit un capital d'expériences et de pratiques de formateurs d'instituteurs en mathématiques. Mais ce "disponible", dans lequel peut puiser le formateur, ne tient pas explicitement compte du "terrain" d'exercice du formateur, aux deux sens du terme :
- terrain constitué par les formés, avec leurs conceptions, leurs connaissances et leurs attentes ;
- terrain d'exercice des formés : certes il a été question des élèves, de leurs conceptions et de leurs modes d'apprentissage dans la deuxième partie, mais le terrain d'exercice compte aussi les autres maîtres, avec leurs habitudes, qui opposeront un "certain frottement" aux élans méthodologiques du nouvel arrivant.

La troisième partie prend donc en compte certains des éléments de ce "terrain" pour proposer des critères de choix au formateur, dans la perspective d'un projet global de formation.

Troisième partie

DES CRITERES DE CHOIX POUR LE FORMATEUR

Introduction

Dans la deuxième partie, nous avons recensé divers éléments de pratiques de formateurs du premier degré en mathématiques, en quelque sorte établi un état du "disponible" sur les thèmes de la formation.

La troisième partie se propose d'éclairer les choix du formateur dans ce "disponible" pour la construction d'un projet global de formation. Elle tente de répondre à la question suivante : quels indices peut prendre le formateur pour ses choix ?

La première source d'indices est bien sûr le public des formés. C'est l'objet du premier chapitre. En effet la réceptivité du public et l'efficacité de la formation dépendent de l'adéquation de la formation aux besoins réels et aux attentes des formés. Il est d'usage de faire expliciter les attentes et de tester les besoins dans toute pratique de formation continue, mais cette pratique est beaucoup moins usitée en formation initiale de novices (ceux qui amorcent leur contact avec l'enseignement par leur entrée dans un centre de formation), car a priori, du point de vue du formateur, les futurs formés ont un besoin égal de formation professionnelle dans tous les domaines mathématiques qu'ils auront à enseigner, sans préjuger de leurs besoins en compléments mathématiques. Certains formateurs prennent appui sur la conception globale des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques qu'ont les formés, mais nous souhaitons ici affiner cette étude et étayer l'hypothèse suivante : les formés n'ont pas les mêmes compétences (a fortiori les mêmes besoins), mais surtout ils n'ont pas les mêmes attentes selon les différents thèmes que l'on évoque avec eux.

En effet, les notions mathématiques de l'école sont connues d'eux, au moins de nom. Ils ont, sur ces notions, certaines compétences mathématiques, d'autant plus disponibles que ces notions font partie du domaine public (ceux les plus utilisés dans la vie courante, par exemple les premières opérations) ; ils ont aussi certaines idées de l'importance de ces notions à l'école, dans la vie, et même de leur enseignement (et ce, d'autant plus qu'ils ont une expérience du terrain)[156]. Il nous semble donc que le formateur ne peut se contenter d'une approche globale, il est nécessaire qu'il affine son étude pour chaque notion.

[156] C'est d'ailleurs avec cette hypothèse que nous avons fonctionné plusieurs années pour construire notre projet de formation, jouant sur les attentes plus ou moins fortes des stagiaires pour nous permettre des études plus ou moins fines de certains thèmes.

Le premier chapitre tente ainsi d'isoler des variables éclairant la relation des étudiants aux différents thèmes de la formation, de tester l'hypothèse d'une attitude des étudiants face au savoir différente selon les thèmes.

Les résultats d'un test proposé en ce sens aux étudiants se révèlent assez caractéristiques des promotions d'étudiants de première année recrutés au minimum deux ans d'étude après le baccalauréat, dans la mesure où ils confortent les constats effectués les années précédentes sur d'autres promotions commençant leur première année dans le centre.

Par ailleurs, le formé, après formation, est amené, non pas à utiliser un produit relativement ficelé comme le serait une théorie mathématique pour résoudre des problèmes, mais à dérouler un processus dans un système qui porte ses propres contraintes, contraintes dont on ne peut pas parfaitement rendre compte à l'intérieur du centre de formation, mais qu'on ne peut pas non plus ignorer. Le formé exercera ses compétences professionnelles dans un milieu qui n'est pas neutre, qui porte ses habitudes et ses règles. Son immersion dans ce milieu le soumettra à des résistances qui fragiliseront ses compétences théoriques, le feront douter de ses capacités. Pour tenter de minimiser cette "régression", le formateur pourra essayer de tenir compte pour sa formation de l'état du milieu d'accueil du formé et de la distance entre les connaissances dispensées dans le centre et celles des autres acteurs du système, titulaires en place, etc. Il pourra prendre des indices dans "l'environnement" de la formation pour analyser le mode de traitement réel du savoir sur le terrain : comment le savoir envisagé est-il traité par les manuels et les maîtres en exercice de la région considérée ? En quoi l'environnement peut-il avoir une influence sur la formation dispensée dans le centre ? Etc.

C'est précisément dans **le deuxième chapitre** que nous cherchons ces autres éléments du côté du terrain d'expérience des étudiants, c'est-à-dire dans les écoles, non pas vues sous l'optique des élèves, mais sous celle des maîtres titulaires et de leur attitude face aux différents thèmes.

Cette recherche aboutit à certaines propositions, que nous ne nous sommes cependant pas donné les moyens de prouver encore.

Ainsi la prise en compte des attitudes face aux thèmes mathématiques des étudiants et des maîtres nous permet de pointer des éléments qui différencient les thèmes entre eux, en quelque sorte de dresser une première esquisse d'une "carte" pour chaque thème. Cette carte pourrait sans doute être encore enrichie à l'issue de notre étude. Mais elle nous permet une clarification des attitudes face à chacun des thèmes de la formation, clarification plus objective pour les attitudes des étudiants que pour celles du "terrain", puisque là, nous n'émettons que des hypothèses.

Le **troisième chapitre** se propose de préciser certains éléments des cartes de chaque thème, de confronter l'analyse stratégique des écrits de formation (deuxième partie, chapitre 2, paragraphe IV, B) aux attitudes des étudiants face aux thèmes mathématiques que nous avons relevées et de vérifier certaines des hypothèses sur les conditions d'application des stratégies (deuxième partie, chapitre 2, paragraphe IV, D). Il prouve aussi qu'une prise en compte des seules attitudes des étudiants face aux thèmes mathématiques ne suffit pas à expliquer les choix prioritaires des formateurs pour la première année (deuxième partie, chapitre 1, paragraphe II, C), donc que les formateurs s'appuient sur d'autres éléments. En résumé, ce chapitre montre les apports et les limites d'une réflexion sur les attitudes des formés face aux différentes thèmes pour la compréhension de la genèse d'un projet de formation.

Dans **le quatrième chapitre**, nous nous interrogeons sur l'utilisation qui pourrait être faite par le formateur des cartes sur les thèmes : le formateur peut ordonner, mettre en réseau ces cartes selon ses "croyances", qui peuvent peut-être, selon nous, être analysées comme une mise en ordre de "croyances élémentaires", que nous appelons principes ; nous faisons des propositions d'explicitation de quelques principes. Il nous semble que l'ensemble des "croyances" du formateur influe fortement sur l'utilisation qu'il fera des cartes, peut-être même détermine la trame de son projet global de formation.

Pour terminer cette étude, nous présentons notre propre mise en réseau des thèmes mathématiques de la formation, en réponse à nos "croyances".

Du côté des étudiants

1. Les variables à prendre en compte

1. Les aspects globaux

La plupart des groupes de formation initiale que nous avons côtoyés, du moins jusqu'en 1993, ont une image assez pauvre des mathématiques et de leur enseignement :
- les mathématiques ne seraient que rigueur et logique,
- l'enseignement des mathématiques ne serait qu'enseignement de formules, de recettes décontextualisées, permettant d'aboutir le plus rapidement et le plus élégamment possible à la solution du professeur.

En revanche, dans les groupes de formation continue, les avis sont plus variés, souvent liés d'ailleurs au niveau de classe où les instituteurs concernés ont l'habitude d'exercer. Il n'est même pas rare d'y rencontrer l'idée de plaisir, de jeu, associé spontanément aux mathématiques.

L'attitude générale des formés face aux mathématiques est un indice important pour le formateur, mais elle peut être affinée, en considérant cette attitude face aux différents thèmes mathématiques de la formation.

2. L'étude par thème

Considérons l'ensemble des thèmes mathématiques à enseigner (regroupant les facettes disciplinaire, didactique et pédagogique). Nous nous référons au découpage des thèmes mathématiques lié aux notions mathématiques à enseigner à l'école, sous leur formulation la plus commune, que nous avons décidé dans notre présentation générale :
- le nombre entier : sa définition et ses codages (thème A) ;
- les opérations traditionnelles sur les nombres entiers, y compris la division euclidienne dans N (thèmes B, C, D, E) ;
- les nombres positifs non entiers : les rationnels et les décimaux, rationnels particuliers et approximations des rationnels et des réels (thème F) ;
- les opérations dans l'ensemble des décimaux (thème G) ;
- les fonctions numériques et le cas particulier des fonctions linéaires (thème H) ;
- les figures planes et leurs propriétés (reconnaissance, construction,...) ; le repérage dans le plan ; etc. (thème J) ;
- les solides de l'espace et leurs propriétés ; le passage de l'espace au plan (thème K) ;

- certaines transformations planes (homothéties, translations, symétries axiales, rotations,...) (thème L) ;
- les grandeurs (mesurables, repérables) et la notion de mesure (thème M) ;
- les notions mathématiques de l'école maternelle, non mentionnées ci-dessus : classement, rangement, relation d'un produit de deux ensembles dans un ensemble, etc. (thème I)

Ces thèmes mathématiques figurent en toutes lettres dans tout programme de l'école élémentaire, le formateur du futur maître se doit de les traiter, sous leurs aspects mathématiques et plus spécifiquement professionnels ; ils ont une résonance spécifique sur l'étudiant ou le futur formé, puisque celui-ci les a déjà plus ou moins rencontrés dans sa scolarité antérieure. Ceci nous amène à formuler une hypothèse : le formé peut avoir des attentes de formation variables selon les thèmes.

Si cette hypothèse se révèle exacte, elle peut contribuer à donner des indications a priori au formateur sur la réceptivité des étudiants à la formation : cette réceptivité sera en effet différente selon les thèmes. Cette hypothèse sera vérifiée dans cette partie et testée dans le chapitre suivant, avec l'aide d'un questionnaire.

D'autre part, l'existence de décalages entre les appréciations du formateur sur les compétences des étudiants et leurs propres idées de leurs compétences peut nécessiter des précautions particulières de formation que nous aurons l'occasion de développer par la suite.

Il nous semble que la relation des formés à ces différents thèmes comporte trois aspects principaux que nous allons détailler :

a - la connaissance a priori qu'ont les étudiants sur le thème (selon le point de vue du formateur),

b - l'idée que les étudiants ont de leur compétence sur le thème,

c - le désir des étudiants de travailler sur le thème.

a - La connaissance a priori qu'ont les étudiants sur le thème

Les étudiants de l'école normale ou les étudiants de l'I.U.F.M. de première année ont tous reçu une formation mathématique minimale, la plupart au moins jusqu'au baccalauréat, dont on pourrait penser qu'elle leur permet d'aborder sans problème particulier les mathématiques de l'école élémentaire. Malheureusement il est fréquent que ces connaissances, sur les thèmes de l'école élémentaire, ne soient plus disponibles, ou soient obsolètes (par déformation de règles trop maladroitement mémorisées), ou restent superficielles[157].

---

[157] Pour mesurer habituellement cette connaissance a priori, nous nous fondons
- sur notre appréciation a priori du profil des étudiants, compte tenu de leur baccalauréat d'origine, et des profils majoritaires de l'année précédente (sachant que cette appréciation peut être soumise à changements, si la sélection est plus forte,...) ;
- sur la première activité ou le premier problème sur le thème, qui nous permet une évaluation globale des compétences ;
- éventuellement sur les résultats d'un test a priori (cf. le test donné par Monique Pézard dans sa thèse).

Nous ne nous intéressons ici qu'à la partie du savoir correspondant à la mise en fonctionnement d'outils, les connaissances nécessaires pour traiter des problèmes classiques en relation avec ce savoir, et pas encore aux connaissances complémentaires nécessaires à l'enseignement et dont la nécessité se fait sentir notamment dans la construction ou l'étude d'ingénieries didactiques[158] : par exemple l'expression fonctions numériques n'évoque pour les étudiants bien souvent qu'étude de fonctions avec comme finalité un tracé de courbes et rarement la modélisation de problèmes par des fonctions numériques ; le mot division évoque l'utilisation de l'outil division pour résoudre certains problèmes élémentaires et peu la compréhension de l'algorithme traditionnel. Même s'ils maîtrisent l'aspect outil du thème, ils ne disposent pas de toutes les connaissances utiles à l'enseignement sur ce thème. Mais seule une réflexion particulière, de type professionnel peut les rendre conscients de la nécessité de ce "deuxième" complément mathématique. Nous ne testerons donc pas cet aspect par notre questionnaire.

Chez les maîtres venant se recycler, la variété des connaissances est plus grande, parce que la nécessité d'exercer les a amenés à compléter leur formation par du travail personnel.

b - L'idée que les étudiants ont de leur compétence sur le thème

Leur scolarité antérieure leur a permis d'apprécier leurs capacités à faire des mathématiques, du moins à résoudre un certain type d'exercices relevant de quelques-uns de ces thèmes. Ils savent donc que sur certains thèmes, leurs compétences sont faibles, d'après les souvenirs de leurs anciennes évaluations scolaires. Et en général, sur les thèmes sur lesquels ils se jugent faibles, ils sont effectivement faibles.

Mais certains thèmes sont loin de leurs préoccupations actuelles, les notions correspondantes ont été peu exercées récemment (par exemple la pratique de la division), et les étudiants se croient opérationnels alors que ce manque de pratique (et une réflexion souvent légère sur la genèse) les a fait "désapprendre" certains procédés (l'algorithme de la division leur pose problème pour certaines valeurs numériques). Là on peut rencontrer un décalage entre leurs croyances et leurs possibilités réelles, décalage dont le formateur doit être conscient, puisque ce décalage influe sur leur rapport au savoir, et en particulier les conduit à se sentir moins réceptifs a priori à des compléments sur le thème en question.

---

[158] Disons que l'on étendra la distinction de R.Douady à ces deux aspects de connaissance :
- un aspect outil, qui serait celui correspondant à la maîtrise de l'utilisation d'une notion comme outil de résolution dans des exercices, sans cependant en maîtriser toutes les facettes ; cet aspect serait celui qu'on souhaite maîtrisé par tout étudiant ;
- un aspect objet correspondant à la connaissance des diverses propriétés du concept et à un exposé en situation décontextualisée, en réseau avec d'autres savoirs mathématiques ; cet aspect est celui que l'on souhaite pour tout enseignant de mathématiques.

Dans cette rubrique comme dans la précédente, nous nous intéressons seulement à l'aspect outil des notions liées à un thème, sans entrer dans les savoirs mathématiques utiles à l'enseignement de ce thème à l'école élémentaire.

c - Le désir des étudiants de travailler sur le thème.

Il est certain que cette interrogation fonctionne sur un autre registre que celui des seules compétences. Mais il nous semble intéressant d'en tenir compte dans la formation, même naïvement, compte tenu des nombreux "blocages" sur les mathématiques, que nous avons constatés chez des adultes se destinant au professorat des écoles.

Ce désir peut être lié bien sûr :

- à une méconnaissance disciplinaire du thème ("j'aimerais enfin comprendre..."),
- mais aussi à la "douleur" d'un apprentissage passé qu'ils n'ont pas envie de transmettre,
- au souvenir d'une complexité particulière du thème (ils ont mis un certain temps avant de le comprendre), complexité dont ils se demandent comment ils vont gérer l'enseignement,
- à l'idée de l'importance que ce thème peut avoir dans la structuration des savoirs mathématiques de l'école élémentaire (peut-on en "faire l'impasse" ou conditionne-t-il d'autres apprentissages ?),
- à un constat vécu d'une inefficacité à gérer certaines questions mathématiques liées à ce thème en classe (surtout parmi les formés ayant une expérience du terrain). Remarquons cependant que ce besoin né du terrain est rarement analysé comme dépendant explicitement des connaissances disciplinaires, mais plutôt comme relevant de connaissances pédagogiques.

Les trois variables **a, b, c** contribuent à préciser l'attitude d'un groupe d'étudiants par rapport à chaque thème de la formation. La première est soumise à l'appréciation du formateur, les deux autres reflètent la vision des étudiants sur leurs propres compétences.

Pour caractériser ces variables, nous utiliserons les codages suivants :

- **a+** : bonne connaissance outil du thème, les étudiants savent utiliser à bon escient la notion mathématique .
- **a-** : leur connaissance de cette notion est mauvaise .

- **b+** : les étudiants pensent qu'ils connaissent relativement bien le thème (du moins suffisamment pour que des rappels mathématiques classiques sur ce thème leur soient inutiles) ;
- **b0** : ils n'ont pas d'avis spécifique sur ce thème ;
- **b-** : ils pensent qu'ils ont besoin de compléments de type mathématique sur le thème ;

- **c+** : ils manifestent un désir de mettre à jour leurs connaissances sur ce thème ;

- **c0** : ils sont relativement indifférents ;
- **c-** : ils ne souhaitent pas entendre parler de ce thème, soit parce qu'ils se sentent compétents sur ce thème et en cela nous rejoignons l'état **b+**; mais d'autres raisons peuvent aussi intervenir dans le cas de **c- b-** : le thème ne leur paraît pas fondamental, les autres thèmes leur paraissant plus angoissants ; ou ils ont eu l'occasion de constater que les informations fournies dans les livres sont suffisantes pour qu'ils s'en sortent seuls ; ou le souvenir de l'angoisse lié à ce thème leur est tellement insupportable qu'ils ne souhaitent plus en entendre parler.

Voilà donc les paramètres qui peuvent, à notre avis, permettre de mieux caractériser le thème mathématique à étudier.

Cette étude par thème des attitudes des étudiants repose notamment sur l'hypothèse que ces attitudes diffèrent selon les thèmes. Nous allons examiner cette hypothèse dans le paragraphe suivant et montrer, par l'analyse des réponses d'une promotion d'étudiants à un questionnaire, qu'elle est pertinente.

2. Le questionnaire posé aux étudiants

L'hypothèse est la suivante : les étudiants, même s'ils aiment ou détestent globalement les mathématiques, ont une attitude et une attente différentes face aux différents contenus mathématiques. Pour tester cette hypothèse, nous avons élaboré un questionnaire, que nous avons distribué à 135 étudiants en tout début de formation (première année de l'I.U.F.M. de Haute-Normandie en octobre 1992) : 89 sur le site de Rouen (soit quatre groupes) et 46 sur le site d'Evreux (soit deux groupes).

1. L'élaboration du questionnaire

L'objectif global de ce questionnaire (cf. annexe W, page 338) est donc de prouver que les étudiants n'ont pas une attitude uniforme face aux différents savoirs d'enseignement de référence de l'école élémentaire. Il est donc nécessaire de leur permettre de s'exprimer indépendamment sur les différents thèmes qui seront à traiter dans la formation.

La première question

Avez-vous une expérience d'enseignement en mathématiques? (en école élémentaire, au collège,...). Laquelle?

permet de détecter les étudiants qui ont eu un autre rapport aux mathématiques que celui venant de leurs propres apprentissages suite à un projet d'enseignement, soit collectif (par exemple celui d'un maître auxiliaire), soit individuel (par exemple un cours particulier). De tels étudiants pourraient posséder des opinions qui trancheraient avec celles de leurs pairs, plus consommateurs de mathématiques que producteurs. Ils pourraient donc former un groupe se détachant dans l'étude faite.

Les mathématiques ont toujours été, pour les étudiants, découpées en domaines qu'ils ont parcourus à divers moments de leur scolarité. Nous avons repris, pour recueillir leurs opinions, le découpage traditionnel des mathématiques à l'école élémentaire, tel qu'il apparaît dans les anciens plans de formation, tout en ajoutant deux thèmes plus "provocateurs", pour la tradition de l'enseignement (l'un étant plutôt contemporain et l'autre plutôt "rétro"), calculatrices et calcul mental, l'un concernant un outil d'aide aux mathématiques numériques, l'autre un certain mode de traitement des nombres.

Nous n'avons par contre pas intégré d'allusion à la maternelle, car les étudiants, nous semble-t-il, n'ont pas de moyen d'apprécier a priori les mathématiques nécessaires à l'école maternelle : leurs propres souvenirs sont par trop lointains, le regard qu'ils peuvent porter sur les travaux des très jeunes enfants de leur entourage est encore très naïf.

Voici les thèmes d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire; chaque thème est répertorié par une lettre :

a - nombre entier	h - nombres autres qu'entiers (décimaux, fractions,..)
b - addition	i - opérations sur les décimaux
c - soustraction	j - fonctions numériques ; proportionnalité
d - multiplication	k - géométrie plane des figures
e - division	l - géométrie plane des transformations
f - calculatrice	m - géométrie des solides
g - calcul mental	n - mesures (longueur, aire, volume, capacité,..)

L'étude de chaque thème comporte une partie disciplinaire (connaissance mathématique) et une partie professionnelle (comment enseigner ce thème à l'école).

Le questionnaire est constitué de deux parties, l'une concernant la partie disciplinaire et l'autre la partie professionnelle de leur formation, cette dernière partie regroupant pour nous ce qui leur permettra de savoir enseigner dans les classes dont ils auront la responsabilité. La distinction entre les deux parties, citée explicitement dans le texte du questionnaire, a été également soulignée lors de la passation (nous avons nous mêmes distribué tous les questionnaires que nous avons récoltés) : en effet, la distinction entre savoirs disciplinaires et savoirs professionnels est en elle-même déjà une connaissance professionnelle, que des nouveaux arrivants dans la formation n'ont aucune raison d'imaginer a priori. Il est certain qu'affirmer que cette distinction existe ne suffit pas non plus à ce qu'elle soit intégrée par les étudiants. C'est d'ailleurs pourquoi nous accordons plus d'importance aux réponses de la partie disciplinaire que de la partie professionnelle.

A priori la première partie devait susciter des réactions plus immédiates, puisqu'évoquant certains souvenirs, au moins au niveau du vocabulaire employé, car elle cite des thèmes dont les étudiants ont nécessairement entendu parler au cours de leur scolarité antérieure (ou au cours de celle de leurs enfants).

Pour répondre à la seconde partie, les étudiants n'avaient que peu d'éléments. Leurs conceptions des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques pouvaient influencer leurs réponses, dans la mesure de leur conviction de l'utilité d'un savoir spécifique professionnel en plus d'un savoir disciplinaire.

Si la nécessité de la conjonction de ces deux types de savoirs leur semblait évidente, ils auraient dû demander ou ressentir la nécessité d'une formation professionnelle sur tous les domaines mentionnés...

Dans la partie Complément Disciplinaire, quatre questions sont posées.

1 - Quels thèmes souhaitez-vous voir traités en priorité ? Les ranger en les numérotant des plus nécessaires vers les moins nécessaires.
2 - Sur quels thèmes vous sentez-vous à peu près "au point" ? Les ranger du plus connu au moins connu.
3 - Y a-t-il des thèmes qui vous effraient plus que d'autres ? Lesquels ? Pourquoi ?
4 - Y a-t-il des thèmes qui vous attirent plus que d'autres ? Lesquels ? Pourquoi ?

La question 1 tente de détecter leurs demandes a priori en compléments disciplinaires (sans qu'un test disciplinaire leur ait permis une certaine objectivation). Elle se fonde donc sur le regard qu'ils ont sur leurs propres connaissances ou le souvenir de leurs propres connaissances mathématiques, qu'ils essaient sans doute de relativiser à l'école élémentaire, du moins à l'idée qu'ils ont des connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. D'autre part cette appréciation se croise sans doute avec celle qu'ils retirent de l'étude plus récente des thèmes mentionnés (par exemple les fonctions dans les lycées).

La question 2 renforce la question 1 et peut permettre de constater dans quelle mesure une bonne maîtrise mathématique, au sens traditionnel de l'enseignement du secondaire, et pointée par la question 1 leur donne une confiance dans ces connaissances. A priori elle devrait apporter un complémentaire à la question 1.

La question 3 essaie de déceler d'éventuels "mal vécus", d'éventuelles souffrances sur l'apprentissage de certains thèmes, mais aussi de pointer les manques qui apparaissent les plus gênants.

La dernière question de cette partie tente au contraire de les faire se remémorer les thèmes qui sont apparus faciles ou amusants (mais à l'usage elle s'est révélée floue et peu efficace).

Donnez les thèmes, par ordre d'importance, sur lesquels vous sentez le plus nécessaire une formation professionnelle.

Cette seule question figure dans la partie dite des Compléments professionnels, dans la mesure où les étudiants n'ont pas d'élément spécifique pour distinguer les différents thèmes entre eux, comme nous l'avons déjà signalé.

Précisons que ce questionnaire est bien sûr un élément important de la thèse développée ici, mais il nous permet aussi de commencer en formation une réflexion sur les "souvenirs d'apprentissage" des étudiants et de pointer l'importance du sujet cognitif dans les apprentissages. D'autres années il était remplacé par un questionnaire plus explicitement dirigé vers les conceptions des étudiants sur les mathématiques et leur enseignement.

2. La passation du questionnaire

Le questionnaire a été lu devant les étudiants ; ils ont réclamé une explication pour certains termes, notamment ceux de "solides" et de "transformations". Les ensembles de départ et d'arrivée des quatre opérations nommées par leurs noms (b, c, d, e) ont été précisés, il s'agit de l'ensemble des nombres entiers. La distinction entre les Compléments disciplinaires et les Compléments professionnels a également été explicitée. Des questions pendant la lecture ont montré qu'un grand nombre d'étudiants rattachaient les thèmes mentionnés aux dernières étapes de la scolarité qu'ils avaient traversées : ainsi "fonctions numériques" évoquaient principalement représentations numériques de fonctions et étude de leurs variations et de leurs limites, la "calculatrice" les renvoyait à une initiation à la programmation pour des calculs de valeurs prises par des fonctions.

La feuille leur a été confiée pendant une semaine. Avant qu'ils ne la remplissent, ils ont donc assisté à une séance de cours sur un thème variable selon les groupes : fonctions numériques pour les uns, géométrie des solides pour les autres, division pour les derniers. Il ne nous était malheureusement pas possible de leur faire remplir ce questionnaire avant ce premier cours, et nous craignions que l'influence de ce premier retour vers les mathématiques n'influencent leurs réponses au questionnaire. C'est d'ailleurs une des raisons pour laquelle nous avons prévu des commencements différents pour différents groupes.

Sur 135 exemplaires distribués, 123 ont été remis, lors du second cours de mathématiques : 81 à Rouen et 42 à Evreux.

3. Dépouillement et analyse

Les résultats du dépouillement figurent en annexe X, page 339.

Voici une vision d'ensemble et quelques remarques suite à une première analyse.

- Le contenu du cours auquel ils ont assisté lors de la première séance ne semble pas avoir eu d'incidence particulière sur les réponses : en effet, bien que les étudiants de Rouen et d'Evreux n'aient pas bénéficié des mêmes thèmes de première séance, tous les groupes ont sensiblement le même profil.
- Les contraintes du questionnaire (ranger un grand nombre de thèmes -14- selon des critères subjectifs imposés) ne permettent d'exploiter qu'une partie des réponses, c'est-à-dire de ne s'intéresser qu'aux premiers choix.

Un premier décompte fait apparaître :

	pour chacun des 3 premiers choix	pour le choix 4	pour le choix 5
question 1	entre 115 et 123 réponses	115 réponses	104 réponses
question 2	entre 118 et 120 réponses	120 réponses	107 réponses
question 3	entre 89 et 113 réponses	44 réponses	21 réponses
question 5	entre 94 et 102 réponses	93 réponses	78 réponses

Il nous semble donc pertinent de ne pas dépasser le choix numéro 5, étant donné que certains étudiants ne sont pas allés au-delà d'un certain nombre de thèmes. Pour l'ensemble des questions une étude des 3 premiers choix sera plus pertinente, et c'est encore plus vrai pour les question 3 et 5.

Pour obtenir une vision d'ensemble des réponses au questionnaire, nous proposons un cumul des réponses aux quatre questions sur les trois premiers choix et sur les cinq premiers choix.

Les étudiants ont en effet indiqué un certain nombre de thèmes dans l'ordre pour chacune des questions. Nous avons compté, pour chaque thème, le nombre d'étudiants le plaçant en première, deuxième ou troisième position pour le cumul des trois premiers choix (ce qui a donné le premier graphique) ; en première, deuxième, troisième, quatrième ou cinquième position pour le cumul des cinq premiers choix (ce qui a donné le second graphique). Par exemple, le thème *nombre entier* a été marqué :

- comme thème prioritaire (question 1),

2 fois en position 1, 0 fois en position 2, 0 en position 3,

soit 2 fois pour le cumul des trois premiers choix ;

- comme thème "au point" (question 2),

75 fois en position 1, 4 fois en position 2, 3 en position 3,

soit 82 fois pour le cumul des trois premiers choix

- comme thème "qui fait peur" (question 3),

0 fois en position 1, 0 fois en position 2, 0 en position 3,

soit 0 fois pour le cumul des trois premiers choix ;

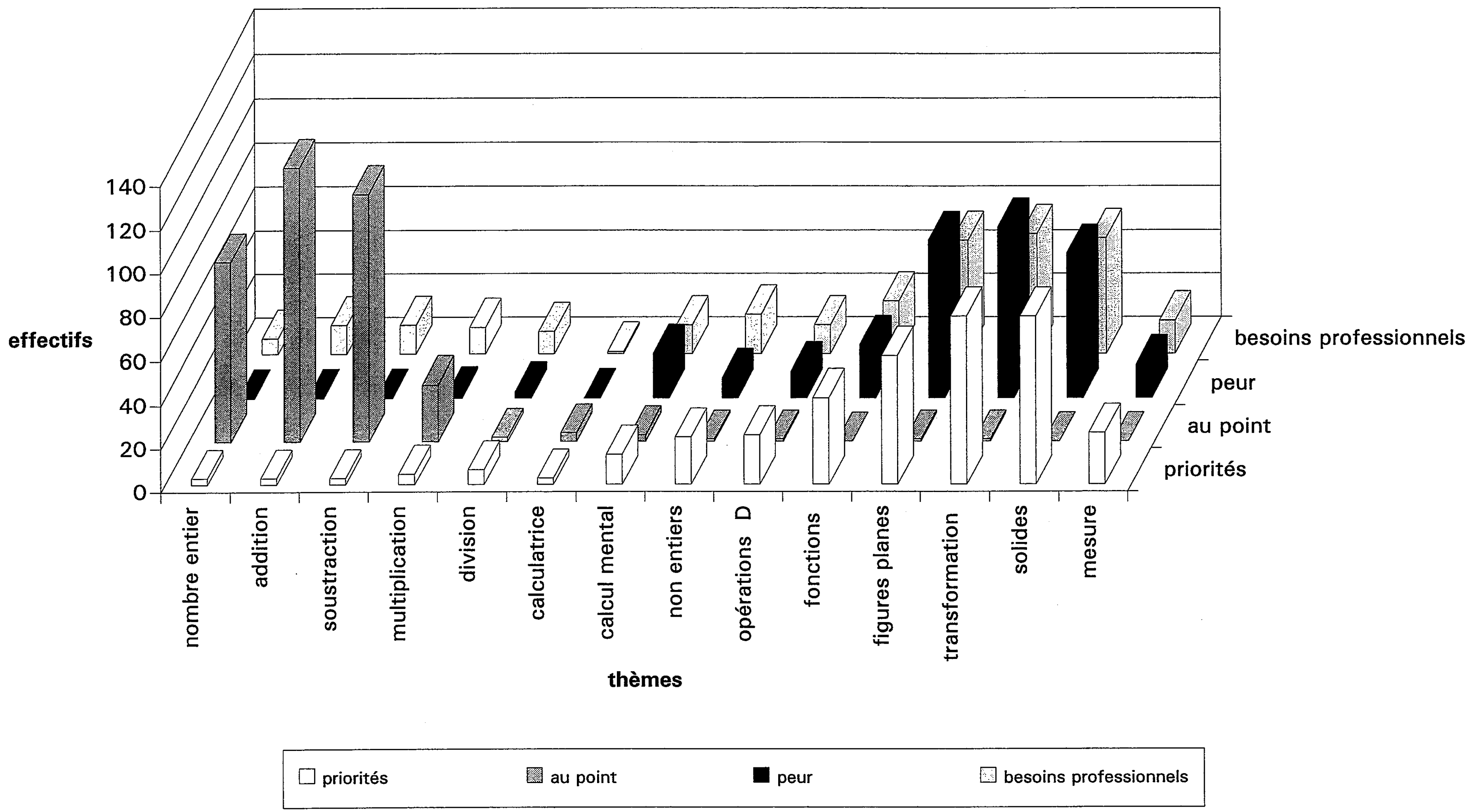
- comme thème sur lequel existe un besoin professionnel (question 5),

7 fois en position 1, 0 fois en position 2, 0 en position 3,

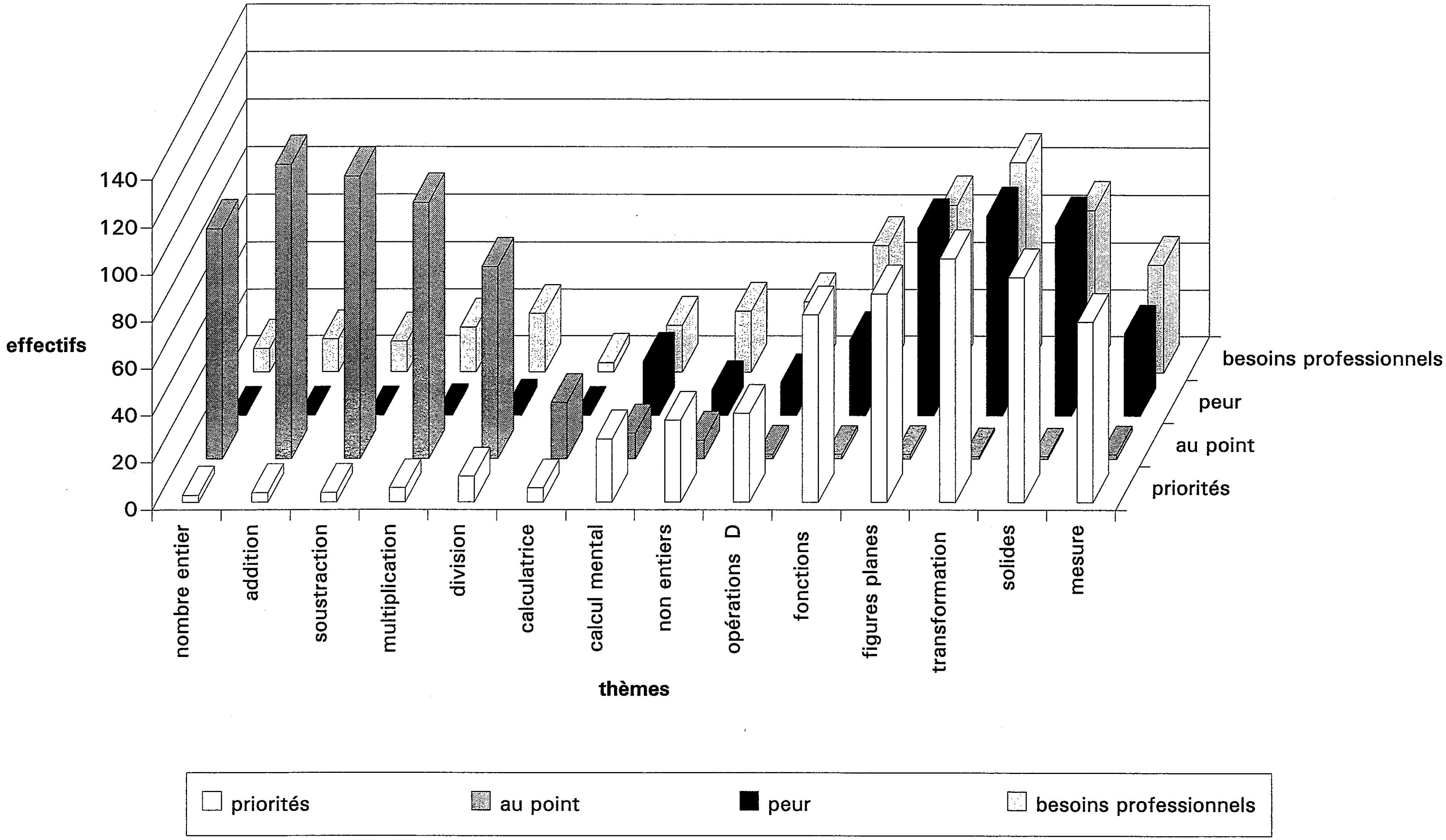
soit 7 fois pour le cumul des trois premiers choix.

Les deux graphiques qui suivent visualisent les résultats de ces cumuls.

Cumul sur les 3 premiers choix des priorités, thèmes "au point", thèmes qui font peur et des besoins professionnels



Cumul sur les 5 premiers choix des priorités, thèmes "au point", thèmes qui font peur et des besoins professionnels



4. Examen des réponses aux questions

Les questions plus spécifiquement dépouillées ont été les questions 1, 2 et 3 et la partie dite professionnelle, la question 4 étant souvent soit sans réponse, soit en liaison directe avec la question 2.

Pour la question 1 : les demandes de compléments mathématiques prioritaires

Que l'on cumule le nombre d'avis exprimés rangeant un des thèmes dans les trois ou les cinq premières positions, on obtient rangés par ordre de priorité :

- *géométrie plane des transformations,*
- *géométrie des solides,*
- *géométrie plane des figures,*
- *fonctions numériques,*
- *mesure,*

suivis par :

- *les opérations sur les décimaux,*
- *les non entiers,*
- *le calcul mental,*
- puis par *la division, les trois autres opérations* et *la calculatrice.*

Remarquons que le passage des trois premiers choix aux cinq premiers détache la *division* des autres opérations et rend plus importante *la mesure*.

En résumé se dégage un premier bloc de priorités sur la géométrie en général, suivie du bloc des *non entiers* ; la *division* a un statut différent des autres opérations.

Pour la question 2, les thèmes sur lesquels les étudiants se sentent au point

Les réponses s'inversent par rapport à celles de la question 1, ce qui conforte leur validité, dans la mesure où elles étaient complémentaires.

En tête des thèmes connus, apparaissent:

- dans les trois premiers choix : *l'addition* et *la soustraction,* très voisines, suivies des *nombres entiers* et beaucoup plus loin *la multiplication* et encore plus loin *la division.* Les autres thèmes ne sont que très épisodiquement mentionnés.
- dans les cinq premiers choix : les trois premières opérations sur les entiers (*addition, soustraction, multiplication*) suivie des n*ombres entiers* et de la *division.* Les autres thèmes mentionnés sont, dans l'ordre *la calculatrice*, *le calcul mental* et *les non entiers.*

Le passage des trois aux cinq premiers choix permet de remarquer de nouveau les statuts différents accordés aux deux opérations, *multiplication* et plus encore *division* qui paraît déboussoler les étudiants, mais cependant pas autant que les thèmes plus à droite sur le graphique.

Quelques commentaires sur les réponses à ces deux questions

- La *division* connaît une position très différente des autres opérations, sans doute par le peu d'utilisation qu'on en fait quotidiennement et le recours possible à la calculatrice, compte-tenu de la complexité de son algorithme traditionnel.
- La connaissance des deux opérations *addition* et *soustraction* semble meilleure que celle sur les *nombres entiers* : peut-être que le fait de citer ce thème in extenso a fait naître un doute sur le type de connaissances mathématiques utiles pour son enseignement. Sans doute aussi ce thème n'a-t-il fait l'objet d'aucun titre de leçon dans la scolarité mathématique antérieure. Par contre les deux opérations sont bien connues pour leur algorithme usuel de calcul écrit.
- La *calculatrice* et le *calcul mental* sont plus cités que la *géométrie* dans les thèmes au point, alors que leur enseignement dans le secondaire n'est pas particulièrement répandu. Les domaines qui relèvent du numérique semblent toujours plus maîtrisés que ceux qui relèvent du géométrique.
- Les étudiants pensent maîtriser les aspects mathématiques liés à la *calculatrice* (peut-être mettent-ils sous cette rubrique uniquement son utilisation dans des calculs opératoires), puisque ce thème vient en quatrième ou cinquième choix.

Pour la question 3 : les thèmes qui les effraient

La géométrie plane des transformations, *la géométrie des solides* et *la géométrie plane des figures* arrivent en tête des thèmes qui font peur, suivis de *mesure* et *fonctions numériques*. Le *calcul mental* est aussi cité dans cette rubrique avec presque la même fréquence que *les fonctions numériques.* L'ordre de ces choix est fixe, qu'il s'agisse des trois ou cinq premiers choix (rappelons que nous avions pointé la moins grande pertinence des réponses en nombre- pour les cinq premiers choix).

Quelques commentaires

- On retrouve, explicitement déclarée, cette phobie de la *géométrie*, que nous avions régulièrement ressentie les autres années, avec les autres publics.
- Les *fonctions numériques* inquiètent les étudiants : pourtant, contrairement à la géométrie, les fonctions numériques ont été souvent "fréquentées" dans l'enseignement secondaire, du moins pour ceux qui en sont sortis récemment. On peut donc imaginer plusieurs causes à leurs peurs : l'éloignement dans le temps, le souvenir d'une mauvaise assimilation ou d'un blocage, la sensation d'une moindre disponibilité ou l'ignorance d'une association possible entre deux expressions connues, *fonctions* et *proportionnalité*. Ces raisons sont d'ailleurs celles évoquées par les étudiants, quand on en discute plus avant avec eux.

- Remarquons également que 11 étudiants (8 sur Rouen et 3 sur Evreux) avouent éprouver une peur devant *tous* les thèmes mentionnés, ce qui compliquera sans doute dans un premier temps leur relation aux mathématiques...

Pour la question sur les besoins professionnels

La prédominance de la *géométrie* se fait de nouveau très nettement sentir dans les besoins professionnels, avec le même ordre de priorité des thèmes géométriques que précédemment. Ce bloc est suivi par les *fonctions numériques* et les *non entiers*.

Globalement l'ordre des besoins suit celui des priorités, à une interversion près entre *calcul mental* et *division.*

Quelques commentaires

- Plusieurs hypothèses peuvent être émises sur la nécessité exprimée d'une formation professionnelle en géométrie : bien sûr le manque de connaissances décelé précédemment, mais aussi le peu de souvenir d'avoir appris de la géométrie à l'école élémentaire ou au contraire le souvenir du caractère quelquefois rébarbatif de la géométrie des derniers enseignements reçus.
- Si l'ordre des besoins professionnels suit si fidèlement celui des priorités disciplinaires, des demandes professionnelles existent aussi pour les thèmes sur lesquels les étudiants se sentent au point disciplinairement. Sans doute ont-ils la forte présomption de la nécessité de formation professionnelle en plus d'une formation disciplinaire.[159]
- Notons que 17 étudiants seulement (8 sur Rouen et 9 sur Evreux) reconnaissent éprouver des besoins professionnels pour tous les thèmes.

5. Les défauts du questionnaire

1 - L'ordre dans lequel les thèmes étaient proposés se trouve être en correspondance avec celui retenu par la plupart des étudiants : les thèmes les plus connus venaient en tête, les plus inconnus se trouvaient en fin de liste. Ceci a pu affaiblir l'attention des étudiants et les amener à respecter l'ordre alphabétique.

2 - Le rangement des thèmes selon un certain d'ordre d'usage à l'école dans les classes (le numérique est plus "pratiqué" que le "géométrique-mesure") a pu augmenter l'effet des thèmes KLMN comme thèmes les plus inconnus.

Peut-être serait-il souhaitable de proposer un questionnaire rangé différemment ?

[159] Cette caractéristique, si elle se révèle exacte, pourrait d'ailleurs présenter une différence fondamentale entre les a-priori entre les futurs professeurs d'école et les futurs professeurs de collège et de lycée.

Notons cependant que les résultats pointés confirment les appréciations qualitatives qu'ont pu faire les professeurs d'école normale sur les idées a priori des étudiants sur leurs connaissances mathématiques.

6. Etude de quelques corrélations qualitatives sur les trois premiers choix

En annexe Y, page 340, figurent des regroupements des résultats par couple de questions.

L'étude qualitative des extraits du graphique principal du cumul des trois choix fait apparaître les faits suivants :

- une certaine cohérence se dégage entre les *priorités* et les *thèmes au point* ; ceux des thèmes qui sont considérés comme les moins bien maîtrisés donnent lieu à des demandes de compléments ;
- le décalage observable entre les choix liés aux *priorités* et ceux *liés aux peurs* permet de faire des hypothèses sur le type de connaissance du savoir qu'ont les étudiants ; une bonne connaissance outil du thème leur permettrait en effet de ne pas en avoir peur, mais ne leur suffirait pas pour l'enseigner (comme par exemple pour les fonctions, les non entiers) ;
- le type de relation donné par le graphique *thèmes au point-besoins professionnels* éclaire la remarque déjà faite précédemment dans le texte : pour les étudiants les besoins professionnels ne se limitent pas à une bonne connaissance du thème disciplinaire sous-jacent, puisqu'ils demandent sur des thèmes bien connus mathématiquement (comme notamment le nombre entier et les opérations dans les entiers) des compléments professionnels ; cette remarque est renforcée par la différence globale d'allure des priorités et des besoins professionnels sur le graphique liant ces deux questions.

7. Etude des savoirs

Apparemment *la géométrie* tient une place spécifique dans la relation des étudiants aux mathématiques : ils ne s'y sentent pas autant au point que dans les thèmes d'arithmétique, en ont parfois peur, attendent beaucoup en formation. Le thème *fonctions numériques-proportionnalité* représente également une attente forte de formation. On peut raisonnablement penser que l'étude de ces thèmes provoquera un investissement fort de la part des étudiants.

Par contre des compléments mathématiques sur les opérations sur les entiers (sauf peut-être la division) nécessiteront d'éveiller l'intérêt préalable des étudiants, puisqu'ils se sentent plus armés sur ces thèmes et donc pourraient n'accepter d'en envisager les aspects mathématiques qu'en dernier lieu, lorsque tous leurs autres manques auraient été comblés.

On voit donc ainsi des liaisons possibles entre les attitudes par rapport aux différents thèmes exprimées par les étudiants et les stratégies de formation déployées par le formateur.

3. Conclusion générale

Par l'étude de ce questionnaire il est donc licite d'affirmer que les relations d'un groupe d'étudiants aux différents savoirs d'enseignement varient selon les savoirs étudiés. Si l'attente de compléments disciplinaires et professionnels est quasi unanime sur la géométrie et les fonctions numériques, elle est par contre beaucoup moins forte sur la mesure ou la division par exemple, cette dernière opération conservant un statut particulier par rapport aux autres opérations de l'école.

Il nous semble aussi que la séparation entre "connaissance effective" et "impression de connaissance" existe. Par exemple les étudiants se sentent, d'après les résultats du questionnaire, relativement au point sur la division. Or notre expérience nous a montré que ce thème était relativement mal maîtrisé par les étudiants : ceux-ci commettent fréquemment des erreurs sur l'ordre de grandeur du quotient ou n'associent la division qu'à un seul type de problèmes. Mais nous reviendrons sur ces dysfonctionnements par la suite. Il nous semble ainsi relativement licite de séparer sur un thème "la connaissance effective" de "l'impression de connaissance" pour mieux connaître le groupe de formés.

Quant à l'envie de savoir, chacun connaît le rôle qu'elle joue dans les apprentissages : si on peut attendre d'un public d'adultes responsables qu'il ait envie d'apprendre à enseigner en général, il est intéressant de moduler la formation en fonction des souhaits plus ou moins forts de complément sur un thème.

Cette analyse d'éléments de conceptions d'un groupe de formés conforte ce sur quoi nous nous appuyions (et les analogies que nous avions pu constater avec les groupes de certains autres formateurs) pour construire notre projet global de formation et associer stratégie et thème. On pourrait s'étonner de ne pas remarquer de grandes différences entre des étudiants licenciés (les nouveaux PE de l'I.U.F.M.) et des étudiants avec une équivalence du D.E.U.G. Il nous semble que ces analogies sont explicables de la manière suivante :
- l'académie de Rouen, étant une académie de fort recrutement, nécessite un grand nombre de futurs professeurs d'école ; mais le vivier est encore actuellement essentiellement local, comme dans beaucoup d'académies très au nord de la Loire ; de ce fait, le recrutement I.U.F.M. de futurs professeurs d'école ressemble assez (pour le moment) au recrutement des futurs instituteurs en école normale ;
- le profil actuel de tous les postulants à un emploi de maître du premier degré dans notre académie est plutôt non scientifique (et pas nécessairement littéraire) ; ces étudiants n'ont pas fait de mathématiques depuis un certain nombre d'années, leur seul exercice de mathématiques est celui de la vie de tous les jours, ce qui peut expliquer une certaine uniformité des différentes promotions sur les conceptions, les peurs et les attentes de formation. Rien ne dit que le public de recrutés ne se modifiera pas au cours des prochaines années, compte tenu de

la conjoncture économique et de l'attirance égale qu'exercent maintenant le métier de professeur d'école et celui de professeur de lycée-collège.

Nous avons donc montré pourquoi il nous semblait pertinent de distinguer les critères **a, b** et **c** examinés dans le paragraphe précédent pour chacun des thèmes.

Une des tâches du formateur est donc de prendre en compte dans la progression qu'il décide de mettre en place sur le temps de formation imparti la spécificité de chacun de ces savoirs relativement au groupe de formés. De quelle manière ? C'est ce que nous allons examiner dans un prochain chapitre.

Du côté du terrain

Dans le chapitre précédent, nous avons essayé de dégager des variables permettant de mieux cerner la relation des étudiants aux différents savoirs mathématiques en jeu dans la formation et de faire fonctionner ces variables sur une promotion. Nous avons conclu à la différence d'attitude des étudiants selon le thème considéré. Cette étude concernait l'amont de la formation, ce dont les étudiants sont porteurs avant d'entrer dans le centre de formation.

Intéressons-nous maintenant à l'aval de la formation. La formation dispensée dans le centre est mise en oeuvre par les formés sur le terrain des classes élémentaires, où elle sera soumise à une seconde transformation (la première ayant déjà eu lieu à l'intérieur du centre, quand les formés ont "appris"), sous les effets conjugués des diverses contraintes de l'environnement du formé. Le formateur se doit d'avoir une bonne connaissance de ce terrain pour minimiser les effets négatifs de cette deuxième transformation, du moins essayer de les prévenir[160]...

En particulier, il peut étudier la façon dont les thèmes mathématiques du programme sont considérés et traités par les différents acteurs du système éducatif. Cette étude contribue à préciser le rapport de chaque thème au "terrain", en pointant certaines variables.

1. Propositions de variables liées au terrain

Voici quelques propositions sur les variables constitutives du milieu d'exercice pour chaque thème.

A - La place du thème concerné dans le champ institutionnel en général (dans les programmes, dans la structuration générale des savoirs enseignés, la relation des non acteurs du système éducatif, etc.).

B - La façon dont le thème est traité dans les manuels : quelle place prend-il, comment est-il traité, existe-t-il des référents possibles ou au contraire de progressions "repoussoirs"[161] ?

C - La façon dont ce thème est traité globalement par les maîtres de l'académie, de telle ou telle circonscription.

---

160 Il a pu tester la première transformation faite sur les connaissances qu'il a transmises par des évaluations à l'intérieur du centre. En revanche, il n'a que peu de moyen d'évaluer, a fortiori de rectifier, la seconde transformation qui se joue hors de son champ.

161 Ces appréciations se font du point de vue du formateur, qui analyse les progressions en accord ou en désaccord avec ses propres conceptions de l'enseignement à l'école élémentaire.

Dans cette rubrique, en quelque sorte, nous essayons de percevoir, comme formateur, la contextualisation de l'enseignement d'un thème donné. Pour chaque variable, nous allons expliciter ce que nous entendons par là et nos motifs pour nous y intéresser.

2. Examen de la variable A

Quelle place a le thème considéré dans les programmes ? Est-ce une notion touchant un seul niveau de classe ou une notion transversale ? Une notion de fin de scolarité ou une notion de l'école élémentaire ?

Il nous semble en effet que la place du thème dans l'édifice des savoirs de l'école est non négligeable : une notion ne touchant qu'un niveau de classe est sous l'entière responsabilité du maître de ce niveau, le maître de la classe suivante pouvant la considérer acquise ; par contre un thème "à cheval" sur un cycle permet au maître d'un niveau de relativiser le manque de compétences de ses élèves sur le thème et de remettre à son collègue le soin de renforcer ces compétences. Autrement dit, la place du thème peut amener à exacerber ou au contraire neutraliser la conscience d'une responsabilité d'apprentissage.

Est-ce une notion qui conditionne d'autres apprentissages (tel le nombre entier et la connaissance de la numération) ou n'intervient-elle qu'à titres épisodiques (telle la géométrie) ?

Par exemple si le nombre entier paraît fondamental à l'école élémentaire, il n'en est pas de même pour la proportionnalité, dont l'enseignement paraît trop précoce à beaucoup d'étudiants, voire d'enseignants en exercice ; en conséquence nombreux sont ceux qui décident de garder ces thèmes pour la fin d'année de cours moyen, quitte à ne pas les traiter si les autres thèmes nécessitent des séances supplémentaires.

Cette appréciation de l'importance du thème dans la classe considérée (ou dans les apprentissages de l'école en général) peut jouer un rôle dans la réceptivité du formé à la formation : sa réceptivité baisse s'il remarque dans les habitudes des maîtres ou par les discussions avec les autres instituteurs en exercice que ce thème est pour eux secondaire. Elle influe aussi sur la construction de sa propre progression lorsqu'il est responsable d'une classe : si autour de lui, le thème est quasiment ignoré, il le placera lui aussi en seconde position, quitte quelquefois à ne pas le traiter.[162]

[162] Cette observation est particulièrement vraie pour d'autres disciplines que les mathématiques : un certain nombre de maîtres concentre leurs énergies et celles de leurs élèves sur les mathématiques et le français et délaissent biologie, sciences physiques, etc., imitant en cela certains maîtres titulaires.

Un exemple de thème considéré comme secondaire à l'école est la géométrie et plus particulièrement la géométrie des solides. Bien qu'elle fasse en toutes lettres partie des programmes de l'école, beaucoup de maîtres la sacrifient au bénéfice de leçons sur la partie numérique, et en laissent la responsabilité aux enseignants de collège. Peut-être l'absence d'outils pédagogiques (que ce soit des leçons de géométrie dans les manuels ou du matériel d'étude tels que solides en bois, cubes emboîtables, faces prédécoupées, etc.), qui pourraient les soutenir dans leur enseignement, renforce-t-il ce rejet de la géométrie.

Certains étudiants, voire certains maîtres, considèrent même que la géométrie ne fait pas partie des mathématiques (par les souvenirs de leur scolarité). Pour citer le cas des écoles d'application des anciennes écoles normales de Rouen, il est d'usage que le maître formateur en exercice laisse à sa "triplette" (maître le remplaçant deux matinées par semaine pour lui permettre de participer à la formation à l'I.U.F.M.) le soin de traiter la géométrie, qui se trouve de cette façon, complètement coupée des mathématiques.

Les nouveaux nommés ont donc peu de chance d'être efficacement aidés dans leurs premiers pas d'enseignement de la géométrie comme partie intégrante des mathématiques. Ils devront donc être particulièrement bien armés sur ce thème en sortant du centre de formation.

Le formateur devra donc livrer un combat particulier sur ce thème : redonner sa place à la géométrie et particulièrement à la géométrie dans l'espace, mais simultanément fournir des idées de situations et de matériel facile à trouver pour permettre au nouveau maître d'acquérir une autonomie.

3. Examen de la variable B

Une appréciation parallèle de l'importance d'un thème dans les habitudes des maîtres est donnée par l'examen des manuels scolaires. La géométrie est très délaissée par les manuels de l'élève, ce qui n'incite pas les maîtres à la traiter. L'absence d'un travail spécifique en formation entraînera avec une quasi-certitude un manque de travail pédagogique en géométrie dans la classe.

Les grandeurs mesurables telles que longueur et surtout masses, aires et volumes sont trop vite assimilées à leur mesure dans les manuels actuels (à la date où nous effectuons ce travail), ce qui provoque des défauts d'apprentissages mentionnés par plusieurs chercheurs (cf. l'étude spécifique de la mesure dans le chapitre 3 de la deuxième partie). Si le thème de la mesure n'est pas traité spécifiquement en formation, une telle dérive sera inévitable et de nombreuses d'erreurs d'élèves resteront incomprises.

Par contre, pour d'autres thèmes, le formateur peut estimer qu'il existe, dans les manuels scolaires, des situations d'enseignement, globalement en accord avec les principes d'apprentissage auxquels il se réfère. L'existence de ces supports peut permettre au formateur de diminuer le détail de l'étude du thème, dans la mesure où il a préparé une bonne lecture de ce manuel par les formés.

Ainsi les diverses propositions des écrits existants et accessibles aux nouveaux formés peuvent avoir une influence sur la décision de traiter ou non tel thème mathématique, après quel autre, et de quelle manière.

4. Examen de la variable C

L'existence de manuels en accord avec la vision de l'enseignement d'un thème par le formateur ne signifie pas cependant que le thème en question est traité par les maîtres en exercice de cette façon. Dans la mesure où il existe des ouvrages qui le traitent en ignorant visiblement l'état des recherches sur la question, le formateur doit veiller à apprécier le plus finement possible les pratiques locales.

Le formateur devra être, nous semble-t-il, particulièrement vigilant aux thèmes qui résistent localement (dans le département où ses étudiants sont susceptibles d'exercer) à une approche pédagogique qu'il pense adaptée.

Pour avoir quelques idées sur les pratiques, on peut se fonder d'une part sur l'étude des manuels les plus utilisés dans l'académie (à l'occasion de leurs stages dans les classes, les étudiants peuvent recenser les livres utilisés dans la classe et par le maître)[163], d'autre part sur les échanges avec les maîtres qui viennent en formation continue et sur les visites des classes d'accueil où les étudiants font leurs stages de pratique accompagnée (exercice de la classe en présence du maître titulaire).

5. Le codage retenu par thème

Les trois variables pointées permettent (nous l'avons montré sur quelques exemples) de différencier entre eux les thèmes mathématiques sur le traitement que leur fait subir le milieu professionnel des maîtres d'école. Nous allons donc retenir un codage qui permet de différencier les appréciations relatives que nous avons pu faire sur chacun de ces thèmes et examiner dans le chapitre suivant ces différences.

---

[163] Par exemple, les manuels scolaires de référence que nous prenons pour les étudier sont les suivants (sous réserve de parution des suivants des collections mentionnées) :
- Collection *Chapuis*, *Calcul et Géométrie*, du CP au CM2, 1989-90, Ed. Nathan.
- Collection *Diagonale*, *Math en Herbe*, CP et CE1, 1991-92, Ed. Nathan.
- Collection *J'apprends les Math*, CP et CE1, 1991-92, Ed. Retz.
- Collection *Math et Calcul*, du CP au CM2, 1986 à 1988, Ed. Hachette.
- Collection *Math Livre Outil*, du CP au CM2, 1990, Ed. Magnard Ecoles.
- Collection *Objectif Calcul*, du CP au CM2, 1985 à 1988, nouveaux CP et CE1 en 1992, Ed. Hatier.
- Collection *Thévenet, Découvrir et Calculer*, du CP au CM2, 1983 à 1988, Ed. Bordas.

Ces manuels éclairent les rubriques B et C.

Pour chacun des thèmes envisagés nous adopterons donc le codage suivant :

A - l'impact du thème dans les mathématiques de l'école élémentaire

A+ : le thème est important (pour les maîtres, la société) ou conditionne d'autres apprentissages

A- : le thème paraît plus secondaire à l'école élémentaire (par exemple la division de deux décimaux)

B - l'existence de référents pédagogiques auxquels nous pouvons renvoyer les étudiants : livres du maître et manuels scolaires associés, articles de revues pédagogiques ou extraits d'aides pédagogiques

B+ : il existe des référents que le formateur juge pertinents pour un enseignement sur le thème

B- : de tels référents n'existent pas, les écrits s'éloignent trop des démarches actuelles ou restent difficilement lisibles pour le public considéré

C - notre évaluation de la façon dont, dans notre académie, le thème est traité dans les manuels les plus utilisés et dans les classes que nous avons l'occasion de visiter ou par les maîtres que nous rencontrons lors de séances de formation continue.

C+ : le thème semble, au formateur, relativement bien traité et ne pas poser d'obstacle d'apprentissage majeur

C- : le thème semble, au formateur, relativement mal traité et susceptible de causer des dysfonctionnements en aval

Bien entendu l'appréciation de cette dernière variable est très subjective. Mais nous pensons que cet aspect a une incidence non négligeable sur le mode de traitement en formation et la position dans le plan global que le formateur associe au thème considéré. Le citer comme critère n'a d'autre but que de rendre le formateur conscient de cette influence.

6. Définition des cartes

Ce chapitre complète donc nos critères de choix sur chacun des thèmes mathématiques, ajoutant à ceux que nous avions déjà formulés sur l'attitude des formés face aux différents thèmes, d'autres critères sur la relation entre savoir et lieu institutionnel d'exercice.

L'ensemble de ces critères constitue ce que nous appellerons la carte du thème. Cette carte fournit un certain nombre d'éléments pour chaque thème permettant d'aider aux décisions sur la planification de la formation, notamment sur l'ordre de présentation des thèmes et le type de stratégies possibles.

Dans le chapitre suivant, nous allons examiner quelle valeur reçoit chacun de ces critères, pour les différents thèmes de la formation et le groupe d'étudiants qui a répondu au questionnaire. Nous constituons donc les cartes des thèmes pour une promotion donnée et dans un environnement fixé.

Les cartes par thèmes

1. Les valeurs des variables pour chaque thème

Nous avons dégagé les variables qui nous semblaient pertinentes pour l'étude des thèmes mathématiques. Dans ce chapitre nous dressons la carte de chaque thème, en attribuant des valeurs aux variables de la carte.

Précisions sur les entrées choisies

Le découpage des savoirs qui a été proposé aux étudiants et aux formateurs dans les différents questionnaires, relevait d'une formulation justifiée dans l'introduction générale. Celle-ci avait aussi pour but de ne pas déboussoler les étudiants sur les savoirs attendus de l'école : pour une meilleure continuité, elle avait été reprise telle quelle pour les formateurs.

Mais nous préférons travailler à partir d'une réorganisation de ces savoirs d'école en contenus de formation dont nous ne ferons apparaître que les entrées mathématiques, sous la forme suivante (c'est ce découpage que nous utilisons dans nos plans de formation) :

- nombre entier et numération ;
- structures additives : cette rubrique regroupe les problèmes additifs, les algorithmes écrits des addition et soustraction, le calcul mental associé, l'utilisation de la calculatrice ;
- structures multiplicatives : de même que la précédente, cette rubrique évoque les problèmes multiplicatifs (et inclut une liaison avec la proportionnalité), les algorithmes écrits de la multiplication et de la division, le calcul mental associé et l'utilisation de la calculatrice ;
- fonctions numériques, dont la proportionnalité ;
- extension de la notion de nombre entier (rationnels, décimaux et réels, approximation des réels par les décimaux, opérations sur les décimaux) ;
- géométrie plane des figures et des transformations ; géométrie des solides ;
- grandeurs et mesures ;
- mathématiques non numériques et maternelle

Ainsi les deux thèmes, "calcul mental" et "calculatrice", présentés aux étudiants et ne figurant pas dans la liste ci-dessus, étaient des concessions faites à leurs attentes communes sur les contenus mathématiques de l'école. Ces deux thèmes sont en effet fréquemment évoqués lors des discussions pédagogiques entre des maîtres en formation. Bien entendu, dans la formation, ces deux thèmes sont intégrés aux savoirs mathématiques dont ils permettent d'éclairer l'enseignement.

La rubrique "mathématiques et maternelle" concerne la partie mathématiques sous-jacente aux enseignements de maternelle, à l'exclusion du nombre entier, puisque ce dernier est cité à part entière ; elle a toujours eu une place un peu boiteuse dans la formation, dans la mesure où l'école maternelle est le lieu privilégié de la pluridisciplinarité. Les formateurs de mathématiques peuvent moins y exercer leur spécificité, ils se sentent en général plus démunis pour ces niveaux de classe que pour ceux de l'école primaire. Cette rubrique ne pouvait pas figurer dans le questionnaire étudiants, dans la mesure où ceux-ci auraient pu ignorer ce que recouvrait cette expression.[164]

Précisons de nouveau que, compte-tenu de sa formulation, le questionnaire posé aux étudiant n'a permis de recenser que leurs idées sur l'aspect outil des différents savoirs et sur la disponibilité a priori de ces savoirs outils dans des situations qu'ils imaginaient être celles de l'école élémentaire.

La liste des variables

Nous rappelons les six variables que nous avons introduites et qui donnent lieu, selon nos hypothèses, à des valeurs différentes par thème

a - La connaissance a priori qu'ont les étudiants sur le thème.

b - L'idée que les étudiants ont de leur compétence sur le thème.

c - Leur désir de travailler l'aspect mathématique de ce thème.

A - La place du savoir mathématique dans l'institutionnel et sur le terrain.

B - La façon dont il est traité dans les manuels en cours.

C - La façon dont ce savoir est traité globalement par les maîtres de l'académie.

Pour chaque thème, nous préciserons **notre vision** de l'état des variables sur ce thème dans l'environnement de notre I.U.F.M. et essaierons de proposer des stratégies de traitement en formation avec le groupe considéré pour les thèmes présentant la même carte.

Remarque importante

Cette étude est liée à la formation dispensée au groupe testé par le questionnaire d'octobre 1992. Elle est nécessairement datée dans la mesure où elle s'appuie sur les publications

[164] Notons que deux autres contenus, pourtant relativement usuels pour la formation, ne sont pas apparus dans la liste proposée aux étudiants (et a fortiori aux formateurs) : "résolution de problèmes" (au sens donné à l'école élémentaire) et "raisonnement, argumentation liée à la preuve". Ces deux facettes du savoir mathématique ont plus statut de connaissances méthodologiques que de savoirs mathématiques, elles sont traités en formation en liaison avec les thèmes cités précédemment, chaque fois que ceux-ci s'y prêtent. Elles ne pouvaient pas être proposées comme telles aux étudiants, car elles risquaient de faire référence à des conceptions obsolètes : les étudiants peuvent considérer que la résolution de problèmes ne sert que dans l'évaluation des savoirs algorithmiques disponibles (par exemple savoir utiliser une multiplication) et non pour l'apprentissage (construire le sens de la multiplication). L'argumentation risque d'évoquer chez les étudiants l'apprentissage de règles fixes de démonstration, déplacé à l'école élémentaire.

existant à cette date. Compte-tenu de la période où se situe cette étude, cette remarque est plus particulièrement valable pour les manuels scolaires et livres du maître associés. Nous citerons parfois pour information les publications récentes qui traitent d'une façon différente le thème envisagé, mais ces publications n'entreront pas en compte pour cette étude, d'autant plus que nous ne renvoyons les étudiants à des collections scolaires que lorsque le livre du maître est paru et pertinent, c'est-à-dire quand l'ensemble des deux outils -manuel scolaire- et -livre du maître- offre une véritable aide au nouveau maître.

Etude de la valeur donnée à chaque variable par thème

Le nombre entier

Il nous semble (et cette hypothèse est faite par un grand nombre de formateurs en exercice) que l'enseignement du nombre entier nécessite, sur le plan mathématique, de comprendre la genèse de ce concept et des codages qui le représentent, c'est-à-dire une réflexion conjointe sur la nature du nombre entier (dégager son caractère abstrait, le définir par rapport à d'autres concepts mathématiques) et les numérations usuelles : la numération orale (numération de groupements par dix, hybride, au sens de la classification usuelle sur les numérations[165], sans nécessité du zéro, avec des groupements auxiliaires par mille, million,...) et la numération écrite en chiffres (numération de position, avec seulement dix chiffres -dont le zéro- pour écrire l'infinité des nombres entiers, avec des règles fixes de fonctionnement). Mais cette réflexion approfondie n'est pas nécessaire pour la connaissance outil du nombre et son utilisation dans des situations ordinaires de vie ou d'enseignement. En effet, des adultes en formation nous ont avoué leur méconnaissance sur les notions citées. Il nous semble ainsi qu'une bonne connaissance des valeurs positionnelles des différents chiffres du nombre écrit en chiffres arabes et de la correspondance entre nombres dits et nombres écrits en chiffres est une condition nécessaire pour réussir tout calcul arithmétique et pour répondre à toute question "usuelle" sur le nombre. C'est du moins avec ces hypothèses que nous fonctionnons.

Par contre, pour l'enseignement du nombre entier, cette connaissance commune ne suffit plus. La construction de situations d'enseignement, le repérage et l'analyse des erreurs des élèves dans le comptage ou le calcul nécessite des connaissances plus approfondies des divers aspects du nombre entier, connaissances qui ne se limitent bien sûr d'ailleurs pas à de seules connaissances mathématiques sur le thème, mais dont la vision mathématique constitue un incontournable aspect.

Compte-tenu de ces hypothèses, nous précisons notre vision des étudiants qui ont répondu au questionnaire.

---

165 cf. *Histoire comparée des numérations écrites*, G.Guitel, collection Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Ed Flammarion, 1975.

Ils ont une bonne connaissance outil du nombre entier (comme tout adulte après une scolarité assez longue), ils connaissent, en acte, le fonctionnement de nos numérations. Pour ce type de connaissances outils, en acte, le nombre entier reçoit le codage **a+**.

Ces connaissances sont maîtrisées de manière consciente, comme le montrent les réponses du questionnaire ; à ce titre, le nombre entier reçoit le codage **b+**.

Le groupe des étudiants n'a pas de demande spécifique de complément mathématique sur le nombre entier, justement parce qu'il sait qu'il est capable de résoudre tous les problèmes rencontrés sur ce thème, le nombre entier est donc aussi affecté du codage **c0**.

Le nombre entier est bien sûr un thème transversal de l'école, il fait partie des apprentissages fondamentaux et de la devise médiatique de certains ministres de l'éducation : "lire, écrire, compter".

L'évolution des recherches pédagogiques, psychocognitives et didactiques a abouti récemment à la conception et diffusion d'ouvrages accessibles à tous les maîtres, qu'il s'agisse d'aides pédagogiques spécifiques sur le nombre[166] ou des parties consacrées à l'apprentissage du nombre entier dans des manuels scolaires éclairés par les livres du maître[167]. Le formateur peut donc d'une part illustrer son discours didactique par des références de classe, d'autre part renvoyer l'étudiant au parcours de ces écrits pour de plus amples informations ou des propositions de mises en place dans les classes.

Par contre, dans la majorité des classes du département (et d'ailleurs aussi du département voisin, l'Eure, dans lequel exercera une partie des étudiants testés par le questionnaire dépouillé), les pratiques d'enseignement du nombre entier restent en deçà des capacités des élèves et semblent même conduire à une régression du numérique de la grande section au CP, compte-tenu de ce que l'on sait sur les apprentissages naturels des enfants de cet âge.

Pour illustrer cette affirmation, nous citons les résultats d'une enquête[168] rapide menée auprès d'étudiants ayant effectué en décembre 1992 un stage de pratique accompagnée (le stagiaire est dans la classe en compagnie du maître titulaire qui se laisse observer pendant qu'il fait classe) dans le cycle 2 (qui regroupe les niveaux GS, CP et CE1, donc des enfants de 5 à 8 ans en moyenne).

Sur 22 classes dont 4 grandes sections, 12 cours préparatoires et 6 cours élémentaires première année, les champs numériques étudiés dans leurs leçons avec les élèves par les maîtres étaient les suivants :

---

166 *Apprentissages numériques GS, CP, CE1*, ERMEL, Ed Hatier, 1990-91-92.
167 Niveau CP dans les collections *J'apprends les math*, Ed Retz, 1991
Diagonale, Ed Nathan, 1992
Atout Math, Ed Hachette, 1989
Objectif Calcul, Ed Hatier, 1992.
168 que nous mettons en relation avec les résultats de l'enquête I.N.R.P. sur les compétences numériques des 5-8 ans.

	GS	CP	CE1
à l'écrit	0 à 10	1 à 9 pour les unes 0 à 6 pour les autres	selon les classes - jusqu'à 49 - ou jusqu'à 99 - ou jusqu'à 900
à l'oral	jusqu'à 31	jusqu'à 60 pour les unes jusqu'à 50 pour les autres	

Ces champs sont bien en deçà des compétences réelles des élèves de ces âges[169]. Ce sont cependant les champs conseillés dans encore un certain nombre de manuels très utilisés dans les classes[170].

Pour ce traitement du "terrain", le nombre entier reçoit le codage : **A+ B+ C-**.

En résumé, nous attribuons au nombre entier le codage : **a+ b+ c0 A+ B+ C-**

Structures additives

Les deux opérations addition et soustraction sont les éléments les mieux connus, consciemment, du groupe d'étudiants considéré (et des étudiants en formation initiale en général). Là encore les étudiants savent utiliser à bon escient les deux opérations et traiter des calculs liés à ces deux opérations sur des nombres entiers ; là non plus ils n'éprouvent pas de désir particulier (ni de nécessité mathématique) sur le thème, n'attendant de la formation que les aspects liés à la méthodologie d'enseignement.

Le thème est reconnu comme une spécificité de l'école par les maîtres et les parents, l'enfant doit être efficace sur ce thème en sortant de l'école.

Actuellement de nombreux écrits proposent des aides pour une classification a priori des problèmes additifs selon les difficultés plus ou moins grandes qu'ils présentent à l'enfant, cette classification, issue des résultats des dernières recherches psychocognitives et didactiques[171], commence à être utilisée dans les progressions de certains manuels scolaires.

Dans les classes, la technique opératoire de l'addition nous semble relativement bien introduite. Le maintien des pratiques anciennes fait encore obstacle à l'utilisation systématique des problèmes pour la construction de la technique, mais ceci n'a pour ainsi dire pas d'effet néfaste sur l'addition, qui, de toute façon, est très liée à la numération ; les techniques opératoires de la soustraction sont plus mal enseignées, plus exactement, la soustraction étant souvent la première opération rencontrée différente de l'addition, elle subit les contrecoups d'une mauvaise intégration de l'apprentissage par résolution de problèmes.

---

169 Voir en annexe Z, page 343, pour comparaison, les résultats de l'enquête INRP parue dans JDI en mai 1987.'

170 Par exemple *Math et Calcul*, CP, Ed Hachette, 1986 où la 29ème leçon porte sur les nombres de 1 à 3, la 30ème sur ceux de 1 à 4, la 31 sur ceux de 1 à 5 , la 43ème sur les écritures des nombres de 1 à 6 (le manuel comporte en tout 138 leçons)

171 *L'enfant, la mathématique, la réalité*, G.Vergnaud, Ed Peter Lang, 1981

L'enfant et le nombre du comptage à la résolution de problèmes, M.Fayol, Ed Delachaux et Nestlé, 1990.

Par conséquent, les codages qu'il nous semble possible d'attribuer, avec une dissociation nécessaire pour les deux opérations :

- addition : **a+ b+ c0 A+ B+ C+**
- soustraction : **a+ b+ c0 A+ B+ C-**

Structures multiplicatives

Les étudiants sont moins sûrs de leurs connaissances sur la multiplication et sur la division, comme le montrent les réponses au questionnaire ; cependant ces thèmes sont les premiers parmi ceux qu'ils ont l'impression de mieux connaître (cf. le cumul des cinq premiers choix).

Les évaluations rapides menées en début de séquences sur leurs connaissances effectives sur ces deux opérations montrent qu'ils ont en effet une meilleure efficacité sur la technique opératoire de la multiplication que sur celle de la division. Pour cette dernière, ils ont par moment tellement mécanisé l'algorithme opératoire qu'un grand nombre se trompe d'un facteur 10 dans des calculs du type recherche du quotient entier de 4150 par 18, où le dernier reste partiel est inférieur au diviseur (ils annoncent 23, reste 10, au lieu de 230, reste 10).

Ces deux opérations ont un statut reconnu à l'école, leur légitimité n'est pas remise en cause (même si la division est considérée comme difficile). Il existe des manuels proposant de progressions raisonnées et cohérentes avec les hypothèses actuelles sur l'apprentissage et l'enseignement[172].

Par contre les pratiques de classe ne sont pas toujours adaptées à leur public : les maîtres se contentent souvent de montrer une technique, sans véritablement permettre aux élèves une réflexion préalable conduisant à sa construction, du moins à la compréhension de son fonctionnement, ceci étant d'autant plus vrai pour la division, dont l'algorithme usuel le plus connu est un modèle de contraction et d'abstraction (la potence sans soustraction posée)[173].

Ces deux opérations reçoivent donc les codages :

- multiplication : **a+ b+ c0 A+ B+ C+** (comme l'addition)
- division : **a- b+ c0 A+ B+ C-**

Fonctions numériques, proportionnalité

Ce thème présente une différence caractéristique avec les thèmes précédents, dans la mesure où les étudiants ne se sentent pas suffisamment armés mathématiquement sur ce thème. Un test mathématique avant de traiter ce thème confirme ces impressions (en règle générale d'ailleurs il est bien rare qu'une reconnaissance d'un manque ne se traduise pas par un

---

172 Voir les manuels de CE1 des collections déjà citées sur le nombre entier.

173 Notre technique usuelle veut qu'on retire mentalement (sans poser la soustraction) du dernier reste partiel le produit du diviseur par le nombre d'un chiffre mis au quotient

manque effectif, du moins par une disponibilité insuffisante de la notion) ; les connaissances des étudiants sur ce thème en général sont de l'ordre de celles décelées par Monique Pézard[174] dans sa thèse (c'est-à-dire réellement très préoccupantes !).

Dans l'enseignement, ce thème n'occupe pas une place aussi reconnue que les précédents. Notion du cycle 3, plus exactement de fin de scolarité, elle est souvent ressentie comme relevant du collège, et ce d'autant plus que les enseignants de mathématiques de collège réclament (notamment lors des liaisons entre CM2 et sixième) que l'école leur laisse quelque chose de neuf[175] à traiter (cf. la question de l'obsolescence[176]) !

Ce rejet vient peut-être de la nature du savoir fonctions numériques : contrairement aux thèmes précédents, c'est un concept *généralisateur*[177], dont la fonction première est d'unifier des relations mathématiques. Il ne se limite pas à être un moyen expert de résoudre des problèmes particuliers, comme pouvait l'être l'addition ou la soustraction. Il se pourrait[178] que sa connaissance objet passe son expression dans différents cadres (numérique, graphique, géométrique, fonctionnel).

Par contre il est vrai que dans certains manuels scolaires, se trouvent des progressions, que le formateur peut estimer en accord avec sa vision de l'enseignement[179], commençant par l'étude d'un grand nombre de fonctions numériques, se poursuivant par le constat de certaines régularités, afin de dégager les caractéristiques de la proportionnalité. Par contre d'autres manuels réduisent l'enseignement de ce thème à l'étude de tableaux de nombres, tous de proportionnalité, qu'il s'agit de compléter avec une ou deux techniques mécanisées (passage par l'ünité ou règle de trois). Dans la mesure où nous pensons que, dans notre académie, les pratiques pourraient être bien enrichies, nous attribuons à ce thème le code C-.

Le thème fonctions numériques reçoit donc les valeurs suivantes :

a- b- c+ A- B+ C-

---

174 *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs*, 1985, thèse de troisième cycle de l'université de Paris 7, pages 243 à 239

175 Un examen attentif des programmes de CM et de sixième montre en effet que tous les libellés des mathématiques de sixième ont déjà été rencontrés à l'école.

176 *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, Y.Chevallard, 1985, Ed La Pensée Sauvage

177 cf. Aline Robert et Jacqueline Robinet

178 hypothèse actuelle de Régine Douady

179 Manuels de CM *Objectif Calcul CM1 et CM2* seulement, avant 92 ; depuis, *Diagonale CM1* (manuel de l'élève paru en décembre 92) et *Atout Math CM1* (manuel de l'élève paru en août 1993, livre du maître paru en septembre).

Extension de la notion de nombres entiers et opérations sur les décimaux

Ce thème est bien connu en général et, comme le nombre entier, ne pose pas de problème particulier aux étudiants, du moins sous l'aspect connaissance des décimaux et opérations sur ces nombres. Par contre les étudiants n'ont que des connaissances peu efficaces sur les fractions, et ne savent distinguer les différentes appartenances des nombres aux ensembles de référence (entiers, décimaux, rationnels, réels). D'autre part ils maîtrisent mal l'aspect *extension* des nombres entiers qu'illustre le savoir nombres décimaux.

Si les décimaux ont une place reconnue dans l'institution scolaire qu'est l'école, il n'en est pas de même des rationnels, considérées du ressort du collège. Actuellement les chercheurs en didactique préconisent une progression qui choisirait d'introduire les décimaux à partir des fractions décimales, donc de rencontrer des fractions, et pas seulement des fractions décimales, avant des nombres décimaux. Aucune progression de ce type, simplement accessible aux étudiants, n'est disponible (fin 1992) pour une utilisation au jour le jour[180].

Par contre les pratiques sur les opérations sur les décimaux, qui se présentent comme une extension de celles sur les entiers ressemblent aux pratiques déjà dégagées pour les opérations sur les entiers ; une formation sur ces opérations résultera donc de la synthèse des enseignements sur les opérations sur les entiers et la construction du sens des décimaux. Nous n'accorderons donc pas d'importance spécifique à ce thème, considérant qu'il dépend des précédents.

D'où la carte suivante pour les nombres autres qu'entiers :

a- b- c+ A+ B- C-

Géométrie plane et dans l'espace

La géométrie est un des thèmes sur lesquels les étudiants se sentent le plus démunis ; leurs connaissances disponibles sont en effet rares et très confuses. C'est le thème sur lequel ils ont la plus forte demande de formation.

Ce thème est en général mal traité dans les manuels et dans les classes de l'école primaire, sans doute parce qu'il se prête le moins à un travail sur fiche, qu'il nécessite un exercice effectif des crayons, instruments de dessin, colle, ciseaux et autres manipulations. Confondu trop vite avec une liste de vocabulaire ou de propriétés à retenir, la façon dont il est proposé aux élèves, nous semble-t-il, ne laisse pas percevoir son intérêt visuel et esthétique, ni ne permet de l'envisager comme un support de situations problèmes.

A l'école maternelle, ce thème se transforme en la connaissance de l'espace proche de l'enfant et des diverses relations spatiales statiques ou dynamiques entre les objets. Cet aspect est en général intégré dans la réflexion géométrique globale.

---

[180] même si des résultats de recherche sont consultables sur le sujet, ils nécessitent une réappropriation forte par le maître avant d'être opérationnels.

Les recherches sur ce thème sont elles aussi encore jeunes, ce qui en fait presque un thème "aveugle" de l'école.

Les trois aspects de la géométrie (plane des figures, des transformations, et de l'espace) reçoivent toutes trois la même carte :

a- b- c+ A- B- C-

Grandeurs et mesures

Les étudiants maîtrisent les aspects outil des mesures de grandeurs : ils savent mesurer une longueur, une masse dans des situations de vie courante. Ils ont plus de difficulté à évaluer la mesure d'une aire ou d'un volume, ils ont oublié "leurs formules", ce qui les amène sans doute à se sentir incompétents mathématiquement sur ce thème et à le demander spécifiquement en formation.

La mesure est certes un thème transversal de l'école, mais parfois considéré comme secondaire, puisqu'il se ramène le plus souvent[181], du moins dans les progressions adoptées par les manuels et par les maîtres, à des calculs sur des nombres décimaux. Cette assimilation trop rapide au numérique ne permet pas de montrer sa spécificité.

Certaines hypothèses ont cours sur la difficulté de l'enseignement de cette notion : peut-être le caractère *généralisateur* de cette notion de mesure explique-t-il en partie sa difficulté ; l'étude du savoir objet peut nécessiter des changements de cadres : numérique, géométrique, cadre des grandeurs. Il est par contre certain que les études pédagogiques des manuels ou des maîtres se limitent à l'étude d'un seul cadre à la fois, laissant aux élèves la responsabilité complète et implicite des jeux de cadres. Dans les manuels et les classes, les grandeurs sont trop vite assimilées à leurs mesures après le choix d'une unité. Les élèves n'ont pas l'occasion de construire le sens de la grandeur, sauf peut-être pour les longueurs, où des activités de classement et de rangement précédent souvent le passage à la mesure. Ce qui amène les difficultés postérieures citées notamment par M.J.Perrin[182], la confusion du périmètre d'une surface avec son aire, et plus globalement l'idée d'un seul nombre associé à une figure plane, indépendamment de la grandeur considérée.

Les grandeurs et mesures reçoivent la carte suivante :

a- b- c+ A- B- C-

---

[181] sauf dans les manuels de CM, *Atout Math* et *Diagonale*, parus en 1993.

[182] Perrin-Glorian M.J.(1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*, Thèse de doctorat d'état, Université de Paris 7.

Mathématiques et maternelle

Nous réservons cette rubrique à l'étude de quelques savoirs précis, comme les relations de classement, de rangement, et leurs outils spécifiques, plus exactement à la justification des mathématiques de la maternelle, comme préparation aux mathématiques de l'école primaire. Nous ne ferons cependant pas figurer ce thème dans notre étude.

Conclusion

En résumé, nous avons donc attribué les codages suivants aux différents thèmes mathématiques :

entiers	addition	soustrac.	multipl.	division	fonctions	non ent.	géomét.	grandeur
a+b+c0 A+B+C-	a+b+c0 A+B+C+	a+b+c0 A+B+C-	a+b+c0 A+B+C+	a-b+c+ A+B+C-	a-b-c+ A-B+C-	a-b-c+ A+B-C-	a-b-c+ A-B-C-	a-b-c+ A-B-C-

Ont donc les mêmes cartes :

- côté public de formés :

* les entiers, l'addition, la soustraction, la multiplication d'une part ;
* les fonctions, les non entiers, la géométrie et la mesure d'autre part ;
* la division à part ;

- côté traitement du terrain :

* l'addition et la multiplication ;
* les entiers, la soustraction et la division ;
* les fonctions numériques ;
* les non entiers ;
* la géométrie et la mesure

Ce qui donne donc six cartes différentes.

	addition multiplication	entiers soustraction	division	géométrie mesure	non entiers	fonction numériques
côté formés	a+b+c0	a+b+c0	a-b+c+	a-b-c+	a-b-c+	a-b-c+
côté terrain	A+B+C+	A+B+C-	A+B+C-	A-B-C-	A+B-C-	A-B+C-
cycles privilégiés	cycle 2 (et 3)	cycles 1 et 2 (et 3)	cycle 3	tous cycles	cycle 3	cycle 3

Nous avons ajouté une ligne précisant le cycle[183] dans lequel étaient enseignés les débuts des thèmes : en effet, c'est aussi un critère, plus objectif que le critère A, mais du même ordre, qui permet de différencier les thèmes mathématiques entre eux.

Ce critère peut présenter un intérêt pour le formateur soucieux d'une certaine exhaustivité sur une année : celle qui consiste à parler de tous les niveaux de l'école élémentaire par le choix de thèmes adaptés.

2. Confrontations à l'état des pratiques des formateurs

Relation au savoir des étudiants et stratégies de formateurs

L'analyse stratégique des écrits de formation (paragraphe IV, B du chapitre 2 de la deuxième partie) avait abouti au tableau suivant, associant les thèmes de la formation avec les stratégies les plus employées :

Thèmes	nombre entier, addition, soustraction, multiplication	géométrie, mesure, fonctions numériques	non entiers	division
Stratégies	transposition et monstration	homologie (avec éléments de transposition)	culturel mathématique, transposition, homologie	toutes les stratégies

Si nous confrontons ce tableau au précédent, nous constatons que :

1 - l'homologie semble plutôt appliquée à des savoirs méconnus, tandis que transposition et monstration sont plutôt réservées à des savoirs mieux connus ;

2 - la répartition des thèmes selon les habitudes stratégiques des formateurs correspond presque totalement à la répartition des thèmes selon le type de rapport des étudiants à ces thèmes.

En effet, les quatre thèmes, *nombre entier*, *addition*, *soustraction*, *multiplication*, qui reçoivent le codage a+b+c0, relèvent de *transposition et monstration.* Ce sont par leur codage a+b+ des savoirs connus des étudiants. La *division*, qui est le seul thème au codage, a-b+c+

[183] Les cycles sont composés chacun de trois niveaux de classe : le cycle 1 regroupe les trois sections d'école maternelle, petite, moyenne et grande sections, le cycle 2 s'étend de la grande section jusqu'au CE1, le cycle 3 regroupe le CE2, le CM1 et le CM2.

est aussi à part pour les stratégies. Les trois thèmes, *géométrie*, *mesure*, *fonctions numériques*, ont le même code a-b-c+ et relèvent de l'homologie. Ce sont des savoirs méconnus.

Si nous exploitons plus loin cette correspondance, nous pouvons nous étonner d'un décalage entre le thème des *non entiers*, présenté comme mal connu des étudiants et le traitement stratégique habituel. Mais une analyse plus fine de ce thème le partage en deux rubriques, sur lesquelles la connaissance des étudiants n'est pas du même type : d'un côté les nombres décimaux, bien connus et maîtrisés dans leurs aspects outils (principalement algorithmiques), de l'autre les autres nombres, rationnels non décimaux et irrationnels, que les étudiants méconnaissent puisqu'ils les confondent avec leurs valeurs approchées décimales. Si un travail spécifique est mené sur les nombres décimaux, une stratégie d'homologie peut paraître peu appropriée car les étudiants maîtrisent ces connaissances (compte tenu des hypothèses sur les conditions sur les savoirs pour l'efficacité des stratégies), et une stratégie de type transposition ou monstration serait plus adaptée. Par contre, sur le thème des non entiers en général, englobant les nombres non décimaux, une stratégie de type homologie permet de redonner du sens à ces nombres et de préciser leurs propriétés mathématiques[184].

Si l'on admet valides, comme semble le confirmer notre étude, l'utilisation d'une stratégie de type homologie sur un savoir mathématique plutôt méconnu des étudiants et celle d'une stratégie de type transposition ou monstration pour d'autres savoirs, trouver sous l'étiquette des *non entiers* les stratégies indiquées conforte les remarques faites sur les autres thèmes.

Il semblerait donc se confirmer, par la confrontation des rapports des étudiants aux savoirs et des résultats de notre étude précédente sur les pratiques des formateurs, que les formateurs réservent des traitements homologiques aux savoirs méconnus des étudiants, gardant les stratégies de transposition et monstration pour des savoirs mieux connus. On retrouve aussi des stratégies culturelles mathématiques pour des savoirs méconnus.

Relation au savoir des étudiants et priorités des formateurs

Si on reprend les résultats du questionnaire des formateurs, les thèmes qui arrivent en tête la première année sont les suivants :

- *géométrie plane,*
- *fonctions numériques,*
- *nombre entier* et *division,*
- *rationnels et décimaux.*

Ce sont des thèmes plutôt méconnus des étudiants, sauf le *nombre entier*. Il est plus difficile de mettre en relation ces résultats avec le tableau des cartes des thèmes.

---

[184] Et nous ne nous sommes pas donné les moyens de prendre en compte ces deux rubriques du thème des *non entiers* dans le questionnaire pour les formateurs.

Le formateur tient sans doute compte dans ces choix d'autres éléments que ceux regroupés dans ce tableau. Ce peut être le concours (puisque les formateurs annoncent qu'ils changent de priorités s'il n'y a pas de concours), ce peut être les rapports locaux des acteurs du terrain aux thèmes, qui varient selon les régions.

Remarquons aussi que si nous cherchons une stratégie commune possible à tous les thèmes venant en tête la première année, les stratégies d'homologie s'imposent car presque tous les thèmes peuvent en relever (sauf celui des *nombres entiers* près).

3. Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons associé à chaque thème une carte qui prend en compte l'attitude des étudiants face à chaque thème mathématique et les réactions du terrain. Ces cartes ont montré leur intérêt pour expliquer certains choix des formateurs pour leur projet global.

En effet, la confrontation des cartes que nous avons établies par thème et des résultats de notre étude de la deuxième partie nous permet de valider deux de nos hypothèses sur l'application de certaines stratégies. Les stratégies d'homologie sont employées principalement avec des thèmes que les étudiants connaissent mal, sur lesquels ils souhaitent des compléments mathématiques, alors que les stratégies de monstration et de transposition sont associées aux thèmes plus maîtrisés par les étudiants. Les stratégies d'homologie seraient préférées en première année de formation. Par contre les priorités des formateurs ne trouvent pas leur complète justification dans les "rapports au savoir" explicités par les cartes. D'autres éléments entrent en compte, peut-être plus subjectifs, qui complexifient l'analyse.

Les cartes des thèmes font donc sans doute partie des indices que le formateur peut utiliser pour choisir parmi le "disponible" que nous avons tenté de préciser dans la deuxième partie. Le chapitre suivant propose des façons d'utiliser explicitement ces indices, notamment pour analyser a posteriori des choix de formateurs.

Comment utiliser les cartes sur chaque thème

Pour chaque thème mathématique du programme de formation, nous avons établi une carte, en nous appuyant sur la relation particulière du public formé à ce thème et sur notre vision du traitement de ce thème dans notre académie. Nous avons constaté que la prise en compte de ces cartes permettait d'éclairer certains choix de formateurs sur l'association entre thème mathématique et stratégie de formation.

Il s'agit maintenant de préciser comment le formateur peut utiliser ce type de cartes pour construire son projet global de formation, en particulier pour décider de l'ordre de traitement des différents thèmes.

Nous postulons que le formateur utilise ces cartes en fonction d'un ensemble de "croyances"[185] qu'il a pour la réussite de la formation. Précisons que ces "croyances" ne sont pas strictement personnelles, elles résultent d'habitudes de formation, transmises de formateurs en formateurs. Pour analyser ces "croyances" nous nous proposons de remonter jusqu'aux principes de ces croyances (en quelque sorte aux "croyances" élémentaires) et d'essayer d'expliciter ces principes. Nous pensons en effet que ces "croyances" peuvent résulter soit de la mise en application d'un seul principe, soit d'une mise en ordre (par importance pour le formateur) de différents principes que nous déterminons dans le paragraphe suivant. L'explicitation de ces principes nous permettra de mieux analyser les choix du formateur (analyse a posteriori des choix) et simultanément pourra fournir une aide à la prise de décisions quant à la construction d'un projet global (analyse a priori du possible).

1. Les principes possibles pour le formateur

Nous allons donc expliciter les principes dont il nous semble avoir perçu l'importance (soit dans l'analyse de notre pratique, soit en interrogeant les autres formateurs), et discuter leur pertinence. Bien entendu à publics différents, combinaison de principes différents.

Nous nous centrerons plus particulièrement sur la formation d'une première année de novices, mais profiterons de cet exposé pour pointer des principes pourraient être ceux de deuxième année ou de formation continue.

Rappelons que nous voyons une différence fondamentale entre la première et la deuxième année, liée à la proximité de l'exercice de classe et à l'urgence des stages en responsabilité : l'étudiant ne veut plus se maintenir comme élève, soumis aux seules contraintes internes du

[185] au sens de P.Bourdieu dans *Questions de sociologie*, 1984, Editions de Minuit, page 114.

centre de formation, il veut devenir acteur, puisque soumis aussi à des contraintes externes au centre de formation.

Pour une meilleure analyse, nous avons regroupé ces principes en positions, chaque position donnant en général naissance à deux principes.

Position 1 : s'appuyer sur l'ordre chronologique des programmes de mathématiques de l'école

Cette position rend possibles deux principes liés à la croyance à l'efficacité de l'ordre que l'on a choisi : d'un côté respecter, de l'autre inverser l'ordre des cycles dans lesquels sont étudiés pour la première fois les thèmes considérés. Le principe suivant l'ordre imposé par la chronologie des programmes de l'école (d'abord les mathématiques du CP, puis celles du CE, puis celles du CM) est celui qui vient le plus naturellement à l'esprit, et c'est d'ailleurs celui qu'ont tendance à adopter spontanément les nouveaux formateurs (aux mathématiques de la maternelle près, sans doute à cause de la spécificité de ce niveau).

Mais la position 1 peut aussi venir d'une réflexion plus étayée, en liaison avec une prise en compte de l'aptitude progressive des étudiants à se représenter les capacités d'élèves d'âges divers. Un formateur souhaitant, par exemple, suivre l'évolution des compétences des enfants avec l'âge, suivrait l'ordre des programmes. Un formateur, considérant que les étudiants peuvent mieux se représenter l'enseignement dans les grandes classes que dans les petites et extrapoler les procédés d'élèves plus âgés de leurs propres façons de résoudre, choisirait de traiter d'abord les thèmes relatifs au cycle 3, pour progressivement redescendre dans les âges.

Ce qui nous donnerait, dans l'ordre des programmes : le nombre entier, les trois opérations, addition, soustraction, multiplication, puis la division, les non entiers, la mesure et les fonctions numériques , la géométrie se plaçant en plusieurs phases alternant avec les thèmes numériques.

Dans l'ordre "inverse", nous commencerions par les thèmes du cycle 3.

Nous avons effectivement rencontré, dans les réponses des formateurs au questionnaire que nous avions fait passer, des ordres qui correspondaient à la chronologie directe des savoirs à l'école. Remarquons que les savoirs mathématiques non numériques liés à la maternelle n'étaient pas le premier thème de cette proposition de formation, bien qu'ils représentent les tout premiers thèmes mathématiques de la scolarité. Ce qui confirme le statut un peu différent de ces "mathématiques", auxquels certains n'accordent même pas le nom, parlant de pré-mathématiques. En revanche, nous avons quant à nous décidé, dans nos progressions, de traiter d'abord de thèmes du cycle 3, parce que nous croyons que les étudiants sont plus à même d'imaginer le type de réflexion d'élèves de 9-10 ans.

Ce premier principe ne nous renseigne pas a priori sur le type de stratégies que le formateur utilise. En effet il garde tous les choix possibles, selon l'idée qu'il se fait de la forme de transmission la plus efficace des connaissances plus professionnelles et de leur liaison avec chaque thème.

Position 2 : s'appuyer sur la connaissance, par les formés, des thèmes mathématiques

Traiter d'abord des thèmes mal connus des formés

La "croyance" qui découle de ce principe est la suivante : s'il s'agit d'étudiants novices, ils acceptent plus facilement de faire des mathématiques au début de leur formation ; plus l'échéance de l'exercice effectif du métier se rapproche, en particulier la deuxième année, où ils sont en général confrontés à des stages en responsabilité (ils sont seuls dans la classe sur plusieurs semaines), moins ils sont réceptifs à une réflexion sur les mathématiques, même si à long terme, elle éclaire leurs jugements pédagogiques. Ils aspirent à des informations utilisables à très court terme.

Traiter d'abord des thèmes plus connus

Le formateur qui choisit de mettre dès le début de la formation l'accent sur les compétences nécessaires à l'enseignement d'un thème peut considérer que le manque de compétences disciplinaires classiques est un handicap incontournable pour une interrogation de type professionnel. Il choisit donc dans un premier temps de traiter des thèmes bien connus des formés, pour que ceux-ci soient libérés du souci de connaître des mathématiques sur le thème et puissent se consacrer principalement au "comment enseigner" ce thème. Il s'attache à enrichir leur conception de l'enseignement de ce thème.

Ce qui ne signifie pas nécessairement qu'il ne traite pas de mathématiques sur ce thème "bien connu". En effet, son objectif peut être aussi de différencier les connaissances mathématiques de l'utilisateur classique de celles de l'enseignant capable de structurer et de relier entre eux les savoirs (savoir résoudre des problèmes additifs en suffit pas pour enseigner l'addition) : il justifie une réflexion disciplinaire, même sur les thèmes a priori connus.

Un plan de formation s'appuyant uniquement sur cette position, compte-tenu des cartes annoncées par thème, serait constitué de deux blocs, traités dans cet ordre (pour le premier principe) ou dans l'ordre inverse (pour le second principe) :

- premier bloc (codage **a-**) avec division, géométrie, mesure, non entiers, fonctions numériques,
- second bloc (codage **a+**) avec addition, multiplication, soustraction et entiers.

L'ordre du plan de formation qui traite d'abord des notions les moins bien connues tiendrait compte des attentes des stagiaires (codage **c+**).

La remarque faite sur les stratégies pour la première position s'applique aussi pour cette deuxième position, parce qu'elle s'intéresse explicitement aux contenus mathématiques.

Position 3 : décider d'une hiérarchie de stratégies et organiser son plan selon cette hiérarchie de stratégies

Cette position repose sur plusieurs hypothèses :
- il existe des stratégies plus efficaces que d'autres en début de formation,
- tous les thèmes mathématiques ne relèvent pas indifféremment de toutes les stratégies.

Sur ces deux hypothèses nous nous sommes déjà exprimés.

Cette position pourrait aussi, nous semble-t-il, être rédigée en remplaçant la "hiérarchie de stratégies" par une "hiérarchie de situations de formation" : le formateur peut en effet être sensible à l'existence de "bonnes" situations de formation (reconnues comme telles par tous les formateurs les ayant utilisées, notamment parce qu'elles produisent les effets annoncés -et recherchés par le formateur- sur les étudiants), mais l'interprétation que peut avoir le formateur des "bonnes" situations est liée, nous semble-t-il, à la croyance qu'il a de l'efficacité des stratégies associées à ces situations.

Nous n'en prendrons comme exemple que la comparaison de trois séances de classe sur la proportionnalité proposée par R.Charnay[186] et déjà mentionnée dans l'étude de la proportionnalité : c'est une situation associée à une stratégie de transposition reconnue efficace, mais ne "fonctionnant" valablement, aux dires de tous les formateurs l'ayant essayée, qu'en deuxième année ou après un temps suffisant de maturation. En cela, elle répond aux conditions constatées pour une efficacité "maximum" -si nous pouvons nous exprimer ainsi- des stratégies de transposition.

La tâche du formateur, qui défendrait cette position 3, consiste alors, en fonction d'une stratégie qu'il décide plus efficace à tel moment de sa formation ou de sa connaissance d'une "bonne" situation de formation, de choisir le thème mathématique qu'il peut travailler avec cette stratégie ou cette situation, et d'ordonner les thèmes mathématiques selon la possibilité d'association et l'ordre des stratégies qu'il a décidés.

Le formateur déduira de la lecture des cartes un rangement des thèmes en accord avec les hypothèses qu'il fait sur l'efficacité des stratégies. Par exemple, l'application du principe "une stratégie d'homologie est particulièrement efficace pour un savoir mal maîtrisé par les étudiants", couplé avec "les stratégies d'homologie sont plus efficaces en première année" placera en première année les thèmes sur lesquels les étudiants savent peu de mathématiques.

---

[186] Charnay R. (1988), Comparaison de situations sur le thème "Agrandissement de figures et proportionnalité", dans *Actes du Colloque de Rouen*, IREM de Rouen, pp57-63.

Position 4 : s'appuyer sur les outils pédagogiques disponibles

Les manuels scolaires et les ouvrages pédagogiques aident le maître à faire sa classe sur le long terme, puisqu'ils lui donnent souvent des idées de progression, des conceptions probables d'élèves, des exemples d'erreurs, etc., et sur le court terme, puisqu'ils lui fournissent des préparations effectives de séances. Ils jouent donc un rôle important dans l'exercice du métier de l'enseignant du premier degré, et ce, d'autant plus, que ce maître n'est pas spécialiste de la discipline. Le formateur doit donc tenir compte de l'existence de ces outils. Il peut même intégrer plus précisément l'existence de ces outils à la construction de son projet de formation par exemple selon deux principes :
- soit en cherchant avant tout à rassurer le formé par le choix de thèmes pour lesquels il existe des outils fonctionnels (selon le point de vue du formateur), pour accompagner celui-ci dans sa pratique de classe (thèmes **B+**) ;
- soit en traitant d'abord des thèmes dont il pense qu'il n'existe pas de référent pertinent pour le maître (thèmes **B-**), afin d'aiguiser le sens critique de celui-ci quand il utilisera les manuels et lui donner le maximum d'outils pour qu'il adapte les progressions des manuels. Il peut étudier moins en détail et plus tard les thèmes sur lesquels il considère qu'il existe des présentations globalement pertinentes (à son avis).

Dans cette optique, le choix des thèmes se fait selon la disponibilité d'ouvrages jugés "au point" sur la question par le formateur et d'ouvrages en désaccord avec ses visions de l'enseignement sur ces thèmes. Remarquons qu'une étude comparée de différentes présentations d'une même notion peut amener le formateur à engager une réflexion sur les conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement, dégager les propriétés fondamentales de la notion à enseigner, comparer les modes d'introduction relativement à la conception retenue, etc., donc finalement faire un point sur la notion mathématiques de l'étude, par les supports des manuels.

Par contre, ici encore, le choix de cette position n'augure en rien du choix de telle ou telle stratégie, même si la tendance est plutôt du côté de la transposition.

Nous obtiendrons l'ordre suivant (codage **B-** puis **B+** ou le contraire) :

- **B-** : géométrie, mesure, non entiers,
- **B+** : les autres thèmes.

Position 5 : s'appuyer sur l'appréciation des pratiques du terrain sur le thème

Cette position prend en compte de façon plus explicite la valeur de la lettre **C**. Il nous semble qu'elle correspond davantage aux choix faits par le formateur lorsqu'il propose des stages de formation continue, cherchant à transformer les habitudes du terrain, tout en s'appuyant sur les demandes de formation de celui-ci. Elles influent moins fortement le choix global du plan de formation des novices, même si elles interviennent, localement à l'intérieur des thèmes, pour définir les stratégies et développer certaines facettes de l'étude de ces thèmes. Le formateur peut effectivement repérer dans l'environnement local du centre où il exerce des enseignements à son avis défaillants ou des demandes répétées de formation sur certains thèmes et définir ces thèmes comme prioritaires. Ces priorités de formation peuvent d'ailleurs s'exprimer sous forme d'un thème soit strictement mathématique (par exemple géométrie), soit plus méthodologique ou pédagogique : raisonnement à l'école, mathématiques et situations problèmes, etc. En ce sens, elles augurent du paragraphe suivant.

Position 6 : choisir des connaissances didactiques ou pédagogiques comme objectifs de formation et illustrer ces connaissances à travers l'étude de thèmes mathématiques

C'est une manière d'aborder le plan de formation qui a été indirectement moins étudiée dans mon travail, puisque celui-ci s'est appuyé d'abord sur les thèmes mathématiques à enseigner.

En quelque sorte, il s'agit pour le formateur d'appliquer de façon dominante des stratégies de transposition : de telles séances permettent aux étudiants de rencontrer plusieurs thèmes mathématiques unifiés par le savoir didactique ou pédagogique visé par le formateur (par exemple la notion de variable didactique, comme dans l'exemple cité dans la thèse d'A.Kuzniak[187], ou encore la notion de dialectique outil-objet, etc.).

Nous incluons dans cette rubrique les séances d'intitulés du type "Activité de résolution de problèmes", où le formateur a comme objectif de faire comprendre à l'étudiant ce que recouvre la résolution de problèmes, donc la notion de problème, puis de l'initier à la méthodologie de la résolution de problèmes. Un certain nombre de formateurs essaie de débarrasser ces séances de tout contenu mathématique qui gênerait la recherche des étudiants, autrement dit ces formateurs proposent des problèmes pour lesquels ils sont sûrs que les connaissances mathématiques nécessaires à leur résolution sont maîtrisées des étudiants.

En résumé

Nous avons essayé de développer les diverses positions que pouvait avoir le formateur et d'en déduire les principes constitutifs de ses croyances pour la construction d'un projet de formation. Nous faisons l'hypothèse que c'est le croisement de ces différents principes qui déterminent ces croyances pour l'efficacité de son projet de formation.

Nous avons expliqué pourquoi certains principes nous semblent davantage s'appliquer à la formation des novices, alors que d'autres nous paraissent réservés à des formés ayant une plus

[187] *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, page 184 , paragraphe 2, 1994, Université de Paris 7.

grande expérience du terrain ou une demande plus urgente. Ainsi cette étude grossière des croisements de divers principes permettrait déjà de différencier les formations initiales selon les publics de formés et la formation initiale de la formation continue.

Nous allons montrer dans le paragraphe qui suit comment l'application de ces principes peut aboutir à la construction d'un projet global de formation. Le public visé sera des étudiants de première année, novices, bénéficiant d'une seconde année avec les stages en responsabilité sur la seconde année, indépendamment de tout concours en milieu ou fin de formation. Pour faciliter l'étude, nous supposerons que ce sont ces étudiants qui ont répondu au questionnaire que nous avons dépouillé dans la deuxième partie (ce qui n'est pas une hypothèse d'école, puisque nous avons constaté que les réponses aux questionnaire correspondaient à l'analyse a priori implicite que nous en faisions). Nous donnerons l'exemple de l'ordre que nous choisirions pour ce public sur les deux années.

2. L'exemple de notre pratique sur un projet global

Nous avons sérié les grandes tendances qui pouvaient s'offrir aux formateurs, pour la construction d'un projet global de formation.

Nous allons donner un exemple de la prise en compte de ces tendances dans notre pratique, montrant quel ordre en résulte a priori (sachant bien que des inflexions de cet ordre sont toujours possibles selon les réactions du groupe de formés).

a. Le public choisi et les contraintes de temps

Nous supposons que le public auquel ce plan s'adresse est constitué des étudiants ayant répondu au questionnaire, et réfléchissons à un plan global sur les deux ans, les notions de la première année étant les premières de la liste.

Ce plan constitue un exemple d'organisation raisonnée des savoirs de formation.

Les contraintes de temps interviennent pour le temps long (total de formation) mais aussi dans le découpage des différentes séances. Si notre appréciation du temps idéal pour des séances d'homologie est trois heures, permettant de faire sans coupure, une synthèse mathématique et une synthèse didactique, après une mise en situation conséquente, nous retiendrons le découpage par tranches de deux heures, sur lequel se sont construites nos dernières expériences.

Notre appréciation du temps idéal entre deux plages de formation consécutives est une semaine, de manière à ce que les étudiants, sur les conseils ou non du formateur, puissent se livrer à des lectures supplémentaires et bénéficient d'un temps d'appropriation conséquent.

Si le planning hebdomadaire compte deux plages de deux heures de mathématiques, nous choisissons plutôt de traiter deux thèmes simultanément dans la semaine, de façon à respecter la coupure souhaitée.

b. Nos "croyances"

Nous reprenons les principes selon l'importance que nous leur accordons, étant cependant conscients que la décision finale résulte d'un "cocktail" secret, où l'humeur du jour n'est pas étrangère. Voici donc les détails de la recette...

1- Permettre aux étudiants de prendre au cours de l'année des informations sur les "sujets cognitifs" de tous les niveaux de l'école et commencer par le cycle 3.

Il s'agit là de leur faire rencontrer des thèmes relevant de tous les niveaux pour évoquer des réactions d'élèves, étudier des procédures d'élèves, observer des élèves de niveaux différents. Il nous semble plus adapté de privilégier d'abord le cycle 3, plus accessible a priori à leurs observations (les réactions d'élèves du cycle 3, surtout des deux dernières années, sont plus proches de celles d'adultes) et de ne parler plus spécifiquement du cycle 1 que lorsque les étudiants nous sembleront avoir relativement bien cerné les hypothèses actuelles sur l'apprentissage et l'enseignement.

2- Choisir en priorité des situations relevant d'une stratégie d'homologie.
Enrichir progressivement de stratégies de transposition en explicitant les outils didactiques utilisés par le formateur dans sa préparation de séquences et utiles pour la préparation de classe.
Illustrer ou non par de la monstration, selon la disponibilité de documents ou faits.

Nous reprenons à notre actif l'hypothèse sur l'efficacité des stratégies d'homologie en début de formation et cherchons à utiliser des stratégies

- de type direct, si nous avons la possibilité d'étudier quelle adaptations seraient nécessaires à la transformation de la situation prévue par les étudiants en une situation pour les élèves de l'école primaire, éventuellement avec le support de manuels scolaires et de livres du maître,
- de type indirect sinon, en faisant évoluer la stratégie vers une stratégie de transposition.

Ces choix de début de formation répondent à plusieurs raisons :

- faire prendre conscience aux étudiants du pas de côté nécessaire que représente la formation : nous avons déjà précisé en quoi l'homologie était plus propice à ce pas de côté ;
- mettre au travail mathématique un groupe classe et donner l'exemple d'une gestion de classe, sans se transporter dans une classe élémentaire (en quelque sorte économiser une visite, mais seulement sur certains aspects de la gestion) ;
- nous appuyer sur les conceptions des étudiants sur les différentes notions : en effet la mise en situation effective sur du savoir mathématique peut permettre au formateur de prendre des indices sur les dysfonctionnements des connaissances.

Nous nous appuyons également pour ce choix sur la croyance en une hiérarchie des stratégies, chacune ayant un rôle à jouer à un moment différent de la formation.

3- Nous appuyer sur des thèmes plutôt mal connus des étudiants pour profiter de leur disponibilité à s'interroger sur les mathématiques la première année (un regard comme élève est encore possible) et pouvoir mettre en place efficacement (selon nos hypothèses) une situation d'homologie.

Il nous semble cependant souhaitable de commencer par un thème pas trop méconnu pour ne pas effrayer les étudiants par leurs manques et pour leur permettre de s'appuyer sur leurs connaissances tout en constatant leur insuffisance pour l'enseignement : les étudiants peuvent ainsi, nous semble-t-il, prendre conscience de deux faces du savoir : celle utile pour appliquer le savoir (utilisation courante), celle nécessaire pour dispenser le savoir.

Voilà donc quelles sont nos "croyances" fondamentales. Pour améliorer la "recette", nous utilisons d'autres principes quand l'application des principes précédents place plusieurs thèmes au même rang.

Ainsi, entre addition et soustraction, nous choisissons d'aborder plus en détail la soustraction, parce qu'elle est encore un sujet qualifié de difficile par les maîtres en exercice et qu'il règne toujours une certaine polémique sur la technique à institutionnaliser, bref le traitement actuel par le terrain peut encore s'améliorer. L'addition par contre nous paraît relativement bien enseignée ; si elle "achoppe" par moments, c'est en relation avec la soustraction dans le cadre des problèmes, ce qui renforce la priorité donnée à une réflexion sur la soustraction.

Nous choisissons la division parmi les savoirs mal connus, d'une part pour les raisons qui relèvent des trois principes, mais aussi parce qu'il existe désormais, nous semble-t-il, des outils pédagogiques adaptés. La prise en compte de l'existence d'outils pédagogiques que nous jugeons adaptés est d'ailleurs de notre part une préoccupation relativement récente. Elle apporte pour nous un plus au choix d'un thème, car nous nous sentons relayés par ces outils dans "l'étayage"[188] que nous fournissons aux étudiants. Dans nos progressions antérieures de première année, le thème de la division avait déjà une place privilégiée, bien que peu de manuels scolaires aient alors préconisé l'approche "situationniste" conseillée en formation (d'où la difficulté que pouvaient avoir les élèves à mettre en place de telles séquences, difficulté dont nous n'étions pas suffisamment conscients). Notre idée était alors de proposer un enseignement différent de celui qui se pratiquait bien souvent dans les classes et plus en accord avec notre conception de l'enseignement. Il restait alors pour les étudiants difficile à mettre en place sans support de type manuel scolaire.

---

[188] M.Develay (1994), *Peut-on former les enseignants*, Collection Pédagogies, Editions ESF, Paris

Notre appréciation de l'enseignement qui est fait du thème sur le terrain a donc aussi une influence sur nos choix : cette raison intervient notamment pour placer le nombre entier relativement au début de la formation. L'appui sur les outils pédagogiques qui existent se fait souvent en conclusion du thème ; il permet d'illustrer ou de confronter les propositions d'enseignement du formateur à celles d'auteurs.

En général pour notre progression, les connaissances didactiques ne nous servent pas de tête de chapitre. Par contre elles sont évoquées lors de l'explicitation des choix du formateur, lors de la construction d'ingénieries de classe élémentaire, lors de l'analyse de productions d'élèves ou d'extraits d'écrits pédagogiques ; elle sont surtout institutionnalisées localement. Disons que les séances uniquement didactiques servent de régulation, les séances à entrée mathématique étant programmées dans leur globalité. En effet, les savoirs mathématiques étant reconnus, le formateur peut opérer une transposition et envisager une "progression". Par contre les savoirs didactiques sont souvent encore trop flous pour que ce même travail s'opère, ils sont délivrés selon l'opportunité ressentie par le formateur et font l'objet de synthèses. Cependant certaines notions didactiques peuvent de nouveau être illustrées par des mises en situation à objectifs didactiques principaux, et objectifs mathématiques secondaires..

c. Rappel des données de l'étude

L'étude des pratiques des formateurs montre que les stratégies les plus courantes sur les différents thèmes sont les suivantes (et prouvent simultanément qu'il existe des situations de formation relevant de ces stratégies) :

Thèmes	nombre entier, addition, soustraction, multiplication	géométrie, mesure, fonctions numériques	non entiers	division
Stratégies	transposition et monstration	homologie (avec éléments de transposition)	culturel mathématique, transposition, homologie	toutes les stratégies

L'analyse des attitudes des étudiants et du "terrain" face aux différents thèmes nous a permis de dresser le tableau suivant :

	addition multiplication	entiers soustraction	division	géométrie mesure	non entiers	fonction numériques
côté formés	a+b+c0	a+b+c0	a-b+c+	a-b-c+	a-b-c+	a-b-c+
côté terrain	A+B+C+	A+B+C-	A+B+C-	A-B-C-	A+B-C-	A-B+C-
cycles privilégiés	cycle 2 (et 3)	cycles 1 et 2 (et 3)	cycle 3	tous cycles	cycle 3	cycle 3

avec la signification des codages suivants :

a - La connaissance a priori qu'ont les étudiants sur le thème.

b - L'idée que les étudiants ont de leur compétence sur le thème.

c - Leur désir de travailler l'aspect mathématique de ce thème.

A - L'impact du thème dans les mathématiques de l'école élémentaire

B - L'existence d'écrits de référence auxquels il est possible de renvoyer les étudiants

C - Notre évaluation du traitement du thème par les maîtres de l'académie.

d. Notre choix effectif

Nous allons donc présenter l'ordre que donne la conjonction de tous ces principes. C'est l'ordre que nous avons mis en partie en place pour la promotion testée (en partie, dans la mesure où nous n'étions pas chargés de l'ensemble de la formation), c'est l'ordre que nous adopterions en l'absence de toute contrainte institutionnelle.

Notre intention n'est nullement de livrer ici une progression modèle, mais plutôt d'illustrer comment la détermination de principes sur la formation permet de construire les grandes lignes d'un projet de formation, autrement dit d'illustrer le lien entre "croyances", habitudes et "disponible".

Proposition d'une progression

Ces éléments croisés avec les positions que nous suivons pour la formation nous dictent alors la progression ci-dessous.

- Présentation aux étudiants du contrat de travail et séance intitulée "résolution de problèmes"[189]
- La division
- De la géométrie plane
- Les entiers (et des aperçus sur l'addition)
- De la géométrie dans l'espace

[189] Le sens que nous donnons à cette expression est explicité dans la suite

- Les nombres non entiers et les grandeurs et mesures de grandeurs
- Les fonctions numériques
- Les structures additives (donc la soustraction)
- La multiplication et les structures multiplicatives
- De la géométrie (plane, espace, transformations)

La justification de cette progression par les données de l'étude

* Selon nos principes, le premier thème de la liste concerne le cycle 3, compte parmi les notions mal connues des étudiants, peut être prétexte à une stratégie d'homologie : il figure donc parmi les thèmes du cycle 3 au codage **a-c+**, soit *division*, *non entiers* et *fonctions numériques.* Nous souhaitons cependant, comme nous l'avons rappelé ne pas nous lancer sur un thème trop méconnu, d'où notre choix sur *division* comme premier thème de la liste. De plus la division occupe une place importante dans les apprentissages mathématiques de l'école, les étudiants sont donc particulièrement réceptifs à une formation mathématique et professionnelle sur ce thème. Nous prévoyons pour ce thème environ cinq séances de deux heures sur la division euclidienne dans l'ensemble des nombres entiers positifs. Ce thème a été suffisamment décrit antérieurement pour que nous n'y revenions pas. Il est bien sûr mis en relation avec celui de la multiplication et le formateur s'applique à communiquer l'idée des réseaux de connaissances.

* En réalité la toute première séquence[190] (en général deux fois deux heures) que nous réalisons avec les étudiants se situe "hors thème mathématique" : en effet il nous semble nécessaire, avec des adultes, de commencer par mettre en place un contrat de travail sur l'année, de préciser nos méthodes de travail et le rôle que nous avons prévu de faire jouer aux étudiants : en bref nous annonçons nos stratégies et les objectifs de notre formation. Nous précisons, sans la nommer ainsi, que notre stratégie de formation principale sera une stratégie d'homologie. Nous profitons de la première séance pour illustrer cette stratégie sur un problème de mathématiques, et simultanément pour définir, par l'exemple, ce que nous considérons comme "activité mathématique". Cependant, pour entrer rapidement dans le vif du sujet, entre autres les notions de recherche, de raisonnement, nous choisissons un problème sans handicap mathématique a priori pour les étudiants[191], pour éviter qu'ils ne se bloquent par peur d'incompétence[192].

---

[190] Nous appelons **séquence** une suite de **séances** (unités de deux heures) sur le même thème.

[191] Exemples de tels problèmes : des problèmes de dénombrement (recherche de tous les carrés partagés en quatre régions par leurs diagonales, dont chaque région est d'une seule couleur, avec trois couleurs disponibles), des problèmes de recherche exhaustive des solutions, à défaut de maîtriser l'outil expert (par exemple le problème de la tirelire, ci-dessous), etc.

[192] Par exemple nous leur faisons résoudre le problème de la tirelire(*) par groupes et sur affiche, les solutions sont comparées et validées, nous pointons la procédure experte et des éléments caractérisant un problème de mathématiques liée à la situation menée. Puis nous distribuons des productions d'élèves de CM sur le même

Ainsi cette séance n'a pas pour but d'enseigner des mathématiques aux étudiants (par exemple une méthodologie générale de résolution de problèmes), mais de leur faire prendre conscience du rôle des problèmes dans les apprentissages mathématiques à l'école, et du mode de gestion par le maître de ces problèmes. Par cette séance, nous leur montrons ce que nous entendons par points de vue de l'élève et point de vue de l'enseignant : ils ont celui de l'élève, quand ils cherchent le problème, et celui de l'enseignant, lorsqu'ils analysent l'intérêt du problème pour les apprentissages mathématiques.

* Le thème qui suit la *division* est à choisir parmi ceux plutôt mal connus, qui relèvent d'une stratégie d'homologie, sur un autre cycle que le cycle 3 : le choix se fait entre *géométrie* et *mesure*. La présentation détaillée de l'ingénierie liée à la *mesure* a montré que la situation de lancement que nous utilisions était aussi une situation de démarrage sur les *nombres non entiers*, également du cycle 3. Le choix se porte alors de préférence sur la *géométrie*. Géométrie plane ou géométrie dans l'espace ou alternance des deux ? A priori peu importe, si ce n'est une préférence pour la géométrie plane d'abord, dans la mesure où le manque de compétences en géométrie plane alourdit considérablement les mises en situation sur la géométrie dans l'espace.

De toute façon la géométrie est traitée en deux séquences minimum entrecoupées par d'autres thèmes : la géométrie plane comporte avant deux séances de synthèse, au moins deux mises en situation des étudiants selon une stratégie d'homologie, par exemple autour de situations dont il a déjà été question dans le premier chapitre de la seconde partie :

- situation de message sur dessin géométrique[193],
- "la fleur", reproduction d'un dessin géométrique[194];
- situations autour de "quadrilatères particuliers"[195]
- "assemblages de triangles équilatéraux" [196].

---

problème, non pas pour conduire une analyse dans le détail, mais pour comparer des procédures d'adultes et des procédures d'enfants, pour préparer au type de travail que nous ferons au cours de l'année (notamment à la prise d'indices sur leur groupe résolvant le problème pour en déduire des réactions d'élèves), pour sensibiliser au pas de côté qu'ils seront amenés à faire en permanence pour progresser dans leur connaissance du "comment enseigner".

(*) Problème de la tirelire : "Dans ma tirelire j'ai 32 pièces de monnaie ; il n'y a que des pièces de 5 F et de 2 F ; avec ces 32 pièces, j'ai 97 F. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ?" L'outil expert est la connaissance et la résolution de l'équation de deux équations du premier degré à deux inconnues.

193 d'après "Jeux de télégrammes", page 180, *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, CM tome 3*, ERMEL, Ed.Hatier.

194 d'après la brochure *Géométrie, une approche par le dessin géométrique au C.M.2*, Ducel Y., Peltier M.L., 1986, I.R.E.M. de Rouen.

195 par H.Péault, dans COPIRELEM (Cahors 1991) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 1, IREM de Paris 7, pp57 à 62.

196 dans COPIRELEM (Cahors 1991) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 1, IREM de Paris 7, pp49-52 ou *La Boîte du Pâtissier*, C.Houdement, M.L.Peltier, IREM de Rouen, 1992, pp21-26 ou en annexe.

Les séances de géométrie dans l'espace fonctionnent selon le même principe que celles concernant la géométrie plane, quelques séances d'homologie permettent de réviser des propriétés géométriques (de géométrie plane ou non) et simultanément de montrer une méthodologie et des exemples d'activités globales sur la géométrie. Ce peut être l'occasion de traiter les différences subtiles entre langage mathématique et langage commun[197], et de pointer la complexité de la question.

La géométrie nous semble un bon thème de début car elle est prétexte à l'illustration d'un certain nombre de concepts didactiques : la notion de variable comme celle d'enjeu intervient souvent dans la reproduction de dessins(cf. la "fleur"), les propriétés géométriques deviennent des outils pour des constructions à une autre échelle (dialectique outil-objet), les jeux de cadres sont illustrés par exemple dans les passages entre raisonnements géométriques et vérifications numériques, etc.

* Si nous souhaitons pour la poursuite de notre progression conserver un équilibre des niveaux de classe évoqués à l'occasion des thèmes, nous ne pouvons qu'enchaîner sur des thèmes de petits niveaux : un thème a donc la préférence, celui des *nombres entiers*. D'une part il permet de parler d'un fonctionnement de classes maternelles, d'autre part il représente le thème fondamental pour les mathématiques en général et les mathématiques de l'école primaire en particulier. Nous combinons stratégies de monstration, via des enregistrements vidéo qui nous permettent d'analyser certaines situations de classe et stratégies de transposition, via l'analyse de certaines fiches pédagogiques de maternelle. L'étude du nombre entier n'est que peu propice à des stratégies d'homologie, sauf pour l'analyse du fonctionnement de nos systèmes de numération[198] : pour enrichir les connaissances des étudiants sur ce fonctionnement, nous pouvons mettre en place certaines situations, homologues de celles que nous pourrions mettre en place dans un C.M sur, notamment, des systèmes de numération étrangers. L'étude fine des numérations permet en outre de traiter une partie du thème de l'addition, du moins au niveau des techniques.

* Le thème suivant les nombres entiers peut être une deuxième séquence de *géométrie*, qui vient renforcer les connaissances déjà vues ou revues (par exemple de la géométrie dans l'espace).

---

[197] cours de DEA de M.Lacombe, O.Ducrot *Dire et ne pas dire* 1973 Ed Hermann

[198] Rappelons que, selon la typologie donnée par G.Guitel (**), notre numération écrite est une numération de position, de base 10 et que notre numération orale est une numération hybride, de groupents par dix, avec des groupements auxiliaires : par exemple mille, million, etc.

(**)Guitel G.(1975), *Histoire comparée des numérations écrites*, Nouvelle bibliothèque Scientifique, Ed du C.N.R.S.

* Les thèmes non encore évoqués sur lesquels les étudiants ont peu de connaissances et donc qu'il nous semble préférable de traiter la première année de formation sont la *mesure*, les *non entiers* et les *fonctions numériques*. Notre choix ne se porte pas en général sur les *fonctions numériques* dans la mesure où ce thème ne touche que la fin du cycle 3, nous le gardons pour la deuxième année, d'autant plus qu'il nous permettra de revenir sur la division dans la cadre des problèmes multiplicatifs. Il est classique de penser que des coupures et des retours sur des thèmes sont plus propices à une bonne appropriation que le traitement en continu d'un même thème. Ainsi, il nous semble plus judicieux de réviser la division via la proportionnalité la deuxième année plutôt que d'espérer boucler les problèmes multiplicatifs la première année.

Le thème suivant est donc la *mesure*, plus précisément la mesure des aires (cf. notre progression dans le chapitre 3 de la seconde partie) : la situation d'homologie que nous utilisons comme introduction de la notion d'aire nous permet simultanément de donner aux étudiants un exemple de situation de référence pour l'introduction des fractions, et donc à long terme des décimaux.

* L'étude de la mesure est suivie ou entrecoupée d'un travail sur les *nombres autres qu'entiers* : en général, soit ces deux thèmes terminent l'année, soit ils introduisent l'année suivante. Si possible, nous cherchons à ne pas les dissocier.

Comme nous avons mis en place plusieurs séquences sur les nombres non entiers dans différents CM, nous disposons de procédures d'élèves et de régulations vécues in vivo sur une progression[199] que nous envisageons pour un CM. Le travail avec les étudiants se poursuit donc autour de l'étude de progressions sur le thème des nombres entiers et sur les possibilités d'enrichir les activités proposées dans les manuels. Ce thème nous donne l'occasion de comparer des démarches sur ce thème, notamment d'insister sur l'intérêt d'introduire les fractions avant les nombres décimaux, contrairement à un grand nombre de pratiques locales.

Nous menons donc simultanément une stratégie qualifiée de culturelle pédagogique et des stratégies de transposition.

Les thèmes qui suivent concernent donc plutôt la deuxième année de formation. Nous les évoquons brièvement.

* Le thème des *fonctions numériques* a été étudié précédemment quant aux écrits de formation disponibles. Nous ne rentrerons pas dans les détails de notre progression, qui s'inspire de ces différents écrits.

---

[199] *La machine à partager. Fractions et décimaux au C.M.*, C.Houdement, M.L.Peltier, juin 1994, I.R.E.M. de Rouen.

* Les trois derniers thèmes mentionnés (les *structures additives*, les *structures multiplicatives*, encore *de la géométrie*, notamment les transformations planes) forment une sorte de synthèse des thèmes précédemment étudiés. Les deux premiers sont abordés par des stratégies de transposition : à travers l'analyse de travaux d'élèves, de résolution de problèmes, le formateur fait part des savoirs didactiques et complète les connaissances des étudiants sur les quatre opérations (ou renvoie à des ouvrages sur le sujet, cf. les bibliographies thématiques). Le dernier thème géométrique cité est plutôt traité par des stratégies d'homologie, car les connaissances mathématiques des étudiants sur ce thème restent insuffisantes pour l'enseignement et c'est l'occasion d'une reprise de propriétés géométriques. Cependant ce dernier représente aussi le thème que nous choisissons de ne pas traiter quand il faut en sacrifier un : nous nous appuyons sur le peu de connaissances exigibles à la fin de l'école élémentaire sur ce thème et considérons que bien des questions touchant aux transformations planes (notamment aux symétries axiales ou centrales) ont déjà été traitées dans les thèmes antérieurs.

Conclusion

Ainsi donc le croisement des positions du formateur avec des indices pris sur les relations entre les différents thèmes et les formés ou les différents thèmes et le terrain permet de déterminer une progression de formation en mathématiques au moins sur la première année.

Conclusion de la partie 3

La deuxième partie dressait l'état des pratiques des formateurs. La troisième partie a proposé des critères et explicité des motifs de formateur pour se décider dans le "disponible" présenté à l'issue de la deuxième partie.

Ces critères sont d'abord dans l'appréciation de la relation entre thèmes et public des formés. En effet, le public a certes des connaissances, mais aussi des conceptions et des attentes différentes pour chaque thème de la formation. Expliciter ces relations donne des éléments pour enrichir la différenciation des thèmes, a fortiori pour faire des choix.

Mais ces critères peuvent aussi être liés à l'appréciation par le formateur de la relation au savoir en aval de la formation, c'est-à-dire sur le terrain du futur exercice des formés. Nous avons proposé des critères pour cette relation, en nous appuyant sur les réactions du terrain de notre lieu de formation. Nous ne pouvons en déduire des conséquences plus générales, les réactions locales se différenciant a priori selon les secteurs (secteur très scolarisé ou non, maîtres titulaires formés sur le tas ou issus d'un centre -Ecole Normale ou I.U.F.M.-, recrutement faible ou fort, etc.).

Nous avons montré que la combinaison de ces critères permettait d'associer à chaque thème une "carte" et que les différents thèmes mathématiques pouvaient être classés selon ces cartes. La confrontation des classements réalisés sur les thèmes et des résultats de la deuxième partie nous conforte dans les idées suivantes, déjà lancées dans la deuxième partie :

- les formateurs emploient de préférence des stratégies d'homologie pour traiter de notions méconnues des étudiants, gardant des stratégies de transposition et de monstration pour des notions plus familières aux étudiants ;
- les formateurs utilisent de préférence des stratégies d'homologie en première année (en début de formation).

Nous terminons cette troisième partie par une hypothèse : il nous semble que les décisions du formateur pour la construction de son projet de formation peuvent s'expliquer par une mise en réseau des thèmes selon leurs cartes et selon les "croyances" du formateur. Nous avons défini ces croyances par une mise en ordre (par importance) de croyances élémentaires, que nous avons appelées principes et que nous avons cherché à expliciter. Enfin nous avons montré comment la combinaison des "croyances" du formateur et des éléments des cartes des thèmes permettait de structurer un projet de formation.

CONCLUSION

Rappel de notre problématique

Dans un contexte de recherches sur la professionnalisation du métier d'enseignant pour l'amélioration de l'efficacité éducative, nous avons souhaité nous interroger sur le métier de formateur d'enseignants du premier degré en mathématiques. Nous nous sommes centrés sur une étude des pratiques effectives de formation, celles qui émergent d'une tradition de formation, avons donc choisi une "approche plutôt descriptive et explicative", afin d'intégrer les éléments "d'une réalité qui résiste"[200].

Quels éléments contribuant à une réflexion sur la construction d'un projet global de formation en mathématiques peut-on extraire de l'expérience accumulée de formateurs en mathématiques du premier degré ? Quels critères de choix proposer parmi ces éléments ? Tels ont été les termes de notre problématique.

Des précisions sur projet, savoirs et démarches de formation

Nous avons défini un projet global de formation comme une juxtaposition raisonnée de situations visant à la communication de savoirs de formation. Mais la détermination de ces savoirs n'est pas évidente, dans la mesure où il n'existe aucune définition de la culture minimale d'un enseignant du premier degré, qu'elle concerne la partie strictement mathématique de cette culture ou celle plus liée à l'acte d'enseigner. La nature même de ces savoirs pose problème. La distinction, au sens de G.Malglaive, entre savoirs théoriques (relevant des mathématiques et de la partie théorisée de la didactique) et savoirs pratiques (savoirs didactiques non encore théorisés et savoirs pédagogiques) nous semble plus adaptée pour la formation que celle entre savoirs mathématiques, didactiques et pédagogiques[201] : le formateur transmet savoirs didactiques et pédagogiques sans nécessairement les séparer explicitement, dans la mesure où ceux-ci représentent deux parties complémentaires, et non opposées, des savoirs sur l'articulation entre enseignement et apprentissage ; ils ne se différencient qu'en termes de niveau d'étude de cette articulation[202].

La détermination des savoirs de formation est une des tâches premières du formateur ; il nous a semblé intéressant d'examiner les pratiques sur la programmation des savoirs de formation. Nous avons décidé de choisir des entrées mathématiques, du type savoirs à enseigner de l'école élémentaire, dans la tradition des écoles normales, pour essayer de décrire ces savoirs. Nous avons appelé thèmes ces entrées, que nous citons dans le tableau qui suit.

---

[200] P.Perrenoud (1994), *La formation des enseignants. Entre théorie et pratique*, page 166, Editions L'Harmattan, Paris.

[201] A.Kuzniak (1994), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, pages 264 à 266, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

[202] cf. M.Altet : la pédagogie examine la relation fonctionnelle enseignant-élèves, l'enseignant étant en situation ; la didactique se centre plutôt sur la structuration du savoir et son appropriation par l'élève

A Nombre entier	**F** Rationnels et décimaux	**J** Géométrie plane des figures
B Addition	**G** Opérations sur décimaux	**K** Géométrie plane des transformations
C Soustraction	**H** Fonctions numériques	**L** Géométrie des solides
D Multiplication	**I** Mathématiques et maternelle	**M** Mesure
E Division		

C'est, dans notre approche, à partir de ces thèmes que s'est définie notre analyse, ces thèmes annonçant des savoirs théoriques et des savoirs pratiques.

Nous avons considéré comme éléments constitutifs d'un projet de formation la mise en ordre des thèmes, la détermination des savoirs de formation associés et le choix de démarches. Pour les démarches, nous nous sommes appuyés sur la clarification des stratégies mises en oeuvre pour former les maîtres du premier degré proposée par A.Kuzniak[203] en y ajoutant nos propres remarques. Les stratégies retenues pour l'analyse ont été principalement les stratégies dites culturelles où le formateur délivre des informations ; les stratégies de monstration, où le formateur utilise l'observation d'une pratique d'enseignement pour enrichir les connaissances des formés ; les stratégies d'homologie, où le formateur joue sur une mise en scène de la situation de formation (homologue à celle qu'il souhaite voir utiliser par les futurs enseignants dans leurs classes) ; les stratégies de transposition, où le formateur se réfère à un savoir théorique sur l'enseignement et essaie de prendre en compte les phénomènes de transposition en transmettant ce savoir.

Pour certains thèmes (*division*, *fonctions numériques*, *mesure*), nous avons donné notre proposition de savoirs de formation. Nous avons aussi illustré le traitement d'un thème par la description de la suite de nos séances de formation sur *Grandeurs et mesure* avec un groupe d'étudiants de première année de l'I.U.F.M. de Rouen.

Des éléments pour la construction d'un projet global de formation

L'étude des pratiques de formateurs en mathématiques d'enseignants du premier degré, amorcée par une analyse de notre propre pratique sur plusieurs années, nous a amenés à nous interroger sur l'existence d'un ordre de présentation des thèmes dans un projet de formation et sur d'éventuelles relations entre thèmes et stratégies, dans la continuité de la recherche déjà citée sur les stratégies de formation. Nous présentons les éléments de réponse que nous avons obtenus et les nouvelles interrogations qui ont suivi.

---

[203] Thèse citée ci-dessus

D'une part, l'analyse d'un questionnaire auprès des formateurs a montré qu'il n'existe pas d'ordre privilégié par tous les formateurs, mais que certains thèmes sont plus fréquemment réservés à la première année de formation. C'est le cas, dans l'ordre de préférence des formateurs, de *la géométrie plane*, puis des *fonctions numériques*, puis du *nombre entier* au même rang que *la division*, enfin des *rationnels et décimaux*.

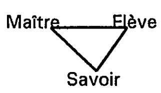
D'autre part, le dépouillement de divers écrits spécifiquement prévus pour la formation en mathématiques des enseignants du premier degré a permis de constater des différences de traitement stratégique selon les thèmes : *le nombre entier*, *l'addition, la soustraction* et *la multiplication* sont plutôt envisagés avec des stratégies de transposition et monstration ; *la géométrie*, *la mesure* et *les fonctions numériques* relèvent de stratégies d'homologie (avec des éléments de transposition) ; *les non entiers* sont traités par des stratégies culturelles, d'homologie et de transposition ; *la division* est prétexte à toutes les stratégies.

Ces analogies et ces différences de traitement stratégique ne trouvent pas d'explication complète dans la nature des savoirs mathématiques sous-jacents : par exemple, *la division*, *la mesure* et *les fonctions numériques* peuvent relever des mêmes stratégies d'homologie alors qu'ils jouent des rôles différents dans l'édifice des savoirs mathématiques. Nous avons donc cherché à analyser ces analogies et ces différences du côté d'une relation entre ces thèmes et les étudiants[204]. Nous avons donc soumis une promotion d'étudiants à un questionnaire et constaté certaines différences d'attitude selon les thèmes proposés.

L'étude des attitudes des étudiants face aux différents thèmes mathématiques cités nous a permis d'envisager une explication aux regroupements des thèmes par traitement stratégique préféré des formateurs[205] : les stratégies d'homologie seraient plus utilisées pour des thèmes sur lesquels les étudiants auraient peu de connaissances mathématiques, alors que les stratégies de transposition et d'homologie seraient plutôt associées à des savoirs connus. Simultanément seraient plutôt réservés à la première année de formation des thèmes liés à des savoirs méconnus (ou à des stratégies d'homologie), exception faite du thème des *nombres entiers*. Ainsi les indices pris par les formateurs sur le public des formés pourraient constituer des critères de choix pour des associations entre thèmes et stratégies : par exemple, le degré de connaissance d'un savoir par les formés fonctionnerait, en partie, comme déterminant un type de stratégies.

Nous avons poussé plus avant notre recherche de critères permettant au formateur de faire des choix, ce qui nous a conduits à examiner d'autres éléments relatifs aux thèmes de la

---

204 au sens des relations de la triade didactique: 

205 avec toutefois une réserve : que les résultats sur les attitudes que nous avons constatés sur une promotion d'étudiants normands soient caractéristiques des attitudes en général des étudiants de première année se destinant à l'enseignement en école élémentaire (du moins jusqu'en 1992, deuxième année d'existence des I.U.F.M.)

formation : par exemple, le traitement que réserve à ces thèmes le "terrain", c'est-à-dire les maîtres en exercice et les rédacteurs de manuels scolaires qui alimentent ces maîtres en situations d'enseignement. En effet le formé n'a pas terminé son travail de formation dans le centre, il adapte au terrain la formation qu'il a reçue dans le centre et réorganise ainsi ses connaissances, en suivant souvent les conseils de ses collègues ou les recommandations des manuels de la classe dans laquelle il exerce. Nous avons donc illustré ce traitement du "terrain" par notre appréciation de "l'attitude du terrain" sur les thèmes de la formation. Il nous semble tout à fait possible que le formateur tienne compte de ces aspects pour la construction de son projet global, même si nous ne pouvons en montrer la trace effective dans les pratiques.

A l'issue de cette étude, nous disposons donc, d'une part d'éléments de pratique de formateurs en mathématiques d'enseignants du premier degré (sur l'ordre de présentation des thèmes et les relations entre thèmes et stratégies), d'autre part de propositions de différentiation des thèmes entre eux selon certains critères (selon notamment les attitudes que manifestent formés et "terrain" face à ces thèmes). Nous terminons notre recherche par une hypothèse, dont nous donnons une illustration : la prise en compte des différences entre les thèmes permet au formateur de se décider sur l'ordre dans lequel il traitera les thèmes et sur les stratégies qu'il emploiera, suivant ses "croyances". Nous proposons une explicitation de ces croyances et essayons de montrer comment une telle analyse peut s'appliquer en partie à la construction d'un projet global de formation.

Quelques réserves

Nous sommes conscients que nous n'avons pu éviter un certain parti-pris dans nos interprétations et que notre propre conception de l'enseignement à l'école élémentaire et de la formation a pu voiler la parfaite objectivité à laquelle nous aspirions en tant que chercheur. Mais d'une part, nous pensons qu'il est impossible de dépersonnaliser complètement une réflexion sur l'enseignement, car celui-ci s'appuie aussi sur des échanges entre individus. D'autre part, il nous semble que nos inclinations personnelles ne polluent pas les résultats de notre étude, dans la mesure où elles ont principalement amorcé ou illustré une réflexion plus générale.

Prolongements et perspectives

Les résultats de nos travaux peuvent être interprétés, nous semble-t-il, de deux façons :
- d'une part comme des possibilités d'analyse de choix de formateur pour la construction d'un projet global de formation : notre étude a montré que les démarches du formateur pouvaient se

différencier selon le thème à enseigner, la nature du public de formés (c'est-à-dire ses compétences et ses attentes) et la place accordée au thème dans la communauté enseignante du premier degré de l'environnement du centre de formation ;

- d'autre part, comme une possibilité d'aide à la construction d'un projet de formation, soit pour un nouveau formateur, soit pour la constitution d'un plan de formation mathématique de première année : une première détermination de critères liés aux savoirs de formation (au sens où nous les avons définis), un recensement de stratégies disponibles sur le thème envisagé, une clarification des "croyances" du formateur quant à l'efficacité de la formation (ou un consensus sur les "croyances" communes d'une équipe d'I.U.F.M.) ou l'inscription dans des habitudes installées, devraient aider le formateur à prendre des décisions éclairées quant à son projet global de formation mathématique.

Les résultats de cette réflexion se limitent à la formation en mathématiques des maîtres du premier degré. Ils sont plus fins sur la formation dispensée en première année sur un public de novices. Nous examinons dans la suite comment les exporter dans d'autres cadres.

Pour l'analyse d'un projet de formation

Il nous semble possible d'exporter la réflexion menée sur un grand nombre de formations du premier degré. Nous voudrions en prendre comme illustration une de nos expériences de formation en mission à l'étranger. Nous nous proposons de prendre cet exemple de l'étranger comme illustration, parce qu'il nous paraît lui donner plus de poids. En effet, d'une part, nous avons suffisamment cité comme éclairant notre étude les différentes formations réalisées dans notre I.U.F.M. ; d'autre part la familiarité de l'environnement nous avait sans doute amenés à prendre implicitement des indices pour adapter notre formation à notre public avant d'avoir fait préalablement un travail d'explicitation. Par contre l'expérience d'une première mission de trois mois au Chili[206], à la demande du Ministère de l'Education Chilien, relayé par le Ministère des Affaires étrangères, nous plaçait dans un environnement nouveau où nous devions naturellement expliciter nos indices pour les intégrer à notre réflexion.

Nous allons décrire une expérience concernant trois séances de formation de trois heures trente chacune, destinée à des formateurs de professeurs d'école[207] (universitaires, inspecteurs, etc.). Une étude des programmes et manuels utilisés dans l'école d'état (manuels obligatoires choisis pour tout le pays) et, à notre demande, des visites de classes élémentaires (mais en trop petit nombre) nous avait fourni quelques indications sur les contenus et les modes d'enseignement. Le programme de ces trois sessions, fixé par le Ministère d'Education chilien, portait sur de la géométrie pour deux séances et sur la calculatrice pour une séance.

---

[206] de juin à août 1991, puis de deux mois en 1992 (avril et mai) et de 15 jours en 1993 (mi-octobre).

[207] "L'école basique" chilienne occupe les dix premières années de la scolarité obligatoire (en gros de 6 à 17 ans). Les professeurs d'école sont formés en général (avec le même type d'exceptions qu'en France !) dans des universités où les enseignements de mathématiques (comme de toute autre discipline) sont séparés de ceux de la méthodologie de la discipline (ils ne sont pas enseignés par la même personne).

Notre première intervention visait à présenter l'enseignement de la géométrie dans l'espace à l'école élémentaire française et la formation des maîtres associée. Après avoir fait un point rapide sur les différents contenus et la méthodologie d'enseignement conseillée dans les programmes français, nous avions choisi d'utiliser une stratégie d'homologie sur une activité de géométrie dans l'espace : d'une part, nous souhaitions donner un exemple de démarche de formation des maîtres, qu'il nous semblait difficile de décrire, compte tenu de l'hypothèse que nous faisions sur les conceptions de la formation que pouvaient avoir les participants ; d'autre part, nous avions ainsi l'intention de générer une réflexion commune sur les apprentissages en géométrie et la formation des enseignants sur ce thème. Nous avons rencontré la résistance "habituelle" de ceux qui savent des mathématiques, qui connaissent des façons de l'enseigner en formation et acceptent difficilement de se positionner, même si le contrat de départ est explicité[208], momentanément comme élèves, dans la mesure où ils ont l'impression que l'intervenant croit qu'ils n'ont pas ce savoir. Beaucoup n'ont pas "joué le jeu" de l'activité, si bien que la poursuite de cette séance n'a pas respecté le déroulement prévu : les participants n'ont pas eu d'éléments pour une analyse a priori de la situation (qu'elle soit envisagée pour des élèves ou des étudiants) ; et notre synthèse n'a pu trouver l'ancrage espéré.

La seconde séance sur la géométrie plane avait été prévue de toutes façons avec une stratégie de transposition, puisque la première séance devait nous avoir permis de donner du "sens" à certaines notions. Elle s'est déroulée en gros comme elle avait été prévue, et elle a été beaucoup mieux accueillie que la précédente[209].

Par contre la troisième séance, sur la calculatrice, a suivi une stratégie d'homologie[210], qui a été bien ressentie par les participants. Lors de cette séance, certains participants ont avoué leur méconnaissance de la calculatrice pour notamment des utilisations non classiques et leur répugnance a priori à l'introduire dans les écoles, a fortiori dans la formation.

Il nous semble que notre travail permet d'analyser cette expérience, notamment le relatif échec de la première séance par rapport à la meilleure réussite des deux suivantes.

Les stratégies d'homologie n'étaient pas adaptées aux formateurs de professeurs pour des sujets connus d'eux (cette fois-ci au niveau professionnel) car ils avaient conscience de leurs savoirs, cherchaient à les enrichir, éventuellement à les comparer à d'autres, mais ne souhaitaient ni les exhiber, ni les mettre en défaut. Or les stratégies d'homologie engagent particulièrement les participants : elles entraînent souvent une confrontation entre pairs ou une interaction avec l'intervenant principal. Les stratégies de transposition leur permettaient une

[208] en l'occurrence cette mise en situation n'avait comme objectif que d'illustrer une démarche de formation dont on discuterait par la suite

[209] Le baromètre fut les applaudissements de fin de séance (habituels dans ce pays) beaucoup plus nourris pour cette séance que pour la précédente.

[210] que nous ne pouvions transformer en stratégie de transposition par absence de savoirs didactiques sur ce thème.

apparente neutralité et un regard "d'égal à égal" avec l'intervenant sur des étudiants en formation. Une stratégie d'homologie sur un sujet connu représentait en quelque sorte une prise de pouvoir a priori de la part de l'intervenant. Au contraire, sur le thème de la calculatrice, les participants reconnaissaient leurs manques, dans la mesure où il n'existait pratiquement aucune expérimentation à l'école chilienne intégrant cet outil, mais qu'un pré-projet du Ministère envisageait de doter toutes les écoles de calculatrices. On retrouve ici les critères de savoir méconnu et de sentiment de méconnaissance accru par l'importance accordée au thème par l'environnement pour accréditer ou non une stratégie d'homologie.

L'incidence de la conception de la place de l'intervenant principal par rapport aux formés n'est pas non plus négligeable : celui-ci est-il considéré comme un pair ou comme un détenteur de savoir que les participants n'ont pas ? Notons aussi que notre statut "d'expert étranger" (venant d'une Europe considérée tantôt progressiste, tantôt colonialiste) a joué un rôle non négligeable dans la crédibilité que nous ont accordée nos auditeurs.

Pour la construction d'un projet de formation

Pour la formation du premier degré en général

Nous avons mentionné au cours de l'étude des aspects de notre réflexion pour des stagiaires en deuxième année de formation ou pour des maîtres titulaires en stage de formation continue. La différence fondamentale que nous avons soulignée[211] entre les étudiants novices et ceux ayant déjà une idée plus ou moins confirmée de l'enseignement des mathématiques dans les classes se situe au niveau du point de vue que le formé aura sur la communication des savoirs qui lui sera faite : les étudiants débutants n'ont sur les mathématiques qu'un point de vue élèves, leur souci premier est de savoir résoudre l'exercice de mathématiques. Le public confirmé, au contraire, n'envisage qu'un point de vue enseignant : son souci principal est de savoir si l'exercice est adapté à l'élève, à la progression, etc. ; s'il ne sait pas résoudre un exercice, il le laissera de côté.

Une hypothèse sur la hiérarchie des stratégies pour un public qui est familiarisé avec son milieu d'exercice découle de cette remarque : les stratégies de transposition et de monstration sont plus adaptées pour un tel public que celles d'homologie. Mais alors suivrait l'interrogation suivante : est-il envisageable de construire de telles stratégies sur les thèmes mathématiques à traiter ? Cela ne conduit-il pas à envisager la formation avec des entrées qui ne soient plus centrées autour de thèmes mathématiques, mais d'expressions relevant davantage d'une problématique professionnelle, telles que mathématiques au cycle des

[211] qui avait été pointée par A.Robert, pour un travail à l'I.U.F.M. de Versailles (1994).

apprentissages fondamentaux (cycle 2), ou variable didactique en mathématiques, ou le raisonnement en mathématiques, etc. ?

Pour la formation du second degré

La première année de formation s'adresse à des étudiants spécialistes des mathématiques puisqu'ils sont généralement titulaires d'une licence de mathématiques. Ces étudiants sont donc moins enclins que ceux du premier degré à refaire des mathématiques, sauf si celles-ci sont au programme du concours. D'où la nécessité que le concours soit pensé en termes d'évaluation d'une culture mathématique minimale de l'étudiant. On retrouve l'urgence de définir les éléments d'une telle culture et de réfléchir à son mode de transmission, notamment à la compatibilité de ce mode de transmission avec celui qu'on attend des futurs professeurs de lycée et collège. Mais d'autre part existe-t-il un consensus des chercheurs ou des recherches suffisamment approfondies pour convenir de démarches d'enseignement pour le collège ou le lycée ? Peut-on d'ailleurs unifier les démarches sur les mathématiques à enseigner de ces deux niveaux ? Autant de questions qui balisent l'extension des recherches faites sur la formation du premier degré.

La deuxième année libère les formés d'obligation de travail strictement mathématique, sauf si on les convainc de leurs lacunes dans cette matière par une réflexion de type professionnel. Les interrogations sont les suivantes : si on s'appuie sur la typologie des stratégies de formation définie pour le premier degré, une dialectique entre, dans un premier temps, des stratégies de transposition et de monstration et dans un deuxième temps, des stratégies d'homologies qui joueraient alors le rôle d'illustration des démarches pédagogiques préconisées (et qui remplaceraient une éventuelle monstration) est-elle souhaitable pour la formation ? Mais les savoirs se prêtent-ils à un tel "jeu de stratégies" ?

Autant de questions, qu'elles concernent le premier ou le second degré, qui nécessiteraient une évaluation de la portée de la formation donnée. Nous n'avons pas intégré cette évaluation à notre travail, dans la mesure où il ne s'agissait encore que de trouver des éléments de pratique de formateurs en mathématiques susceptibles d'être généralisés[212] et de proposer des critères de choix parmi ces éléments. Nous nous permettons cependant d'insister, reprenant en partie les propos d'A.Kuzniak dans la conclusion de sa thèse, sur la complexité de cette évaluation.

---

[212] dans la continuité de la recherche faite par A.Kuzniak (1994)

Deux niveaux d'évaluation de la formation des enseignants sont à considérer. Le premier concerne l'évaluation de la formation reçue à l'intérieur du centre, dans quelle mesure les formés se sont appropriés les contenus transmis et comment ils les intègrent dans leurs pratiques. La disponibilité de ces compétences est d'ailleurs institutionnellement évaluée par le concours[213] en fin de première année. Le second concerne l'efficacité de l'enseignant sortant, dans sa gestion de l'articulation enseignement-apprentissage dans une classe ; cette efficacité est en relation avec la validité des modèles d'enseignement transmis par les formateurs : ces modèles sont-ils adaptés, adaptables à toute classe et toute situation dont les acteurs (enfants et maître) sont infiniment variables ? Ceci est une autre question, qui relève de la professionnalisation du métier de professeur d'école.

* *
*

Même si notre travail est imparfait et notre contribution modeste, il nous semble cependant avoir fait quelques vers la "professionnalisation de l'enseignement" en proposant des éléments d'explicitation du métier de formateur. Cette étude n'aurait cependant pas été possible sans les avancées des recherches en didactique des mathématiques, ni sans les expériences accumulées par les praticiens de la formation mathématique des enseignants du premier degré.

Novembre 1994

[213] Une recherche est en cours sur les sujets de concours (M.L.Peltier).

BIBLIOGRAPHIE

Avertissement

La bibliographie est partagée en trois rubriques :

- les références bibliographiques ;
- des bibliographies pour la formation par thème mathématique mentionné dans notre étude ;
- une bibliographie complémentaire.

Références bibliographiques

ALTET M. (1994), *La formation professionnelle des enseignants*, Collection Pédagogie d'aujourd'hui, Editions PUF, Paris.

ANTHEAUME P. (1993), *Contribution à la définition des objectifs spécifiques et des activités spécifiques de formation professionnelle d'enseignants non spécialistes dans une discipline scientifique : la biologie*, Thèse de doctorat, Université de Paris 7.

BOURDIEU P.(1984), *Questions de sociologie,* Editions de Minuit, paris

BOURDONCLE R.(octobre 1993), "La professionnalisation des enseignants", seconde partie, Note de synthèse de la *Revue Française de Pédagogie* n°105, .

BOURGEOIS E (1981), *Vers une formation des enseignants au développement et à la gestion de projets : une alternative à la "déformation" professionnelle ?* Mémoire de licence de psychopédagogie dirigé par J.M.de Ketele.

BUTLEN D., (Cahors 1991) "Analyse d'une séquence sur la division au CM", *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques,* COPIRELEM, IREM de Paris 7, p123.

CANU M. et al (1991),*Math et info au C.M.*, pages 4-34, I.R.E.M. de Rouen.

CHARNAY R. (1987), *Des problèmes pour apprendre en CM2 et en 6ème*, pages 30 à 32 ; IREM de Lyon

CHARNAY R. (1988), "Comparaison de situations sur le thème Agrandissement de figures et proportionnalité", dans *Actes du Colloque de Rouen*, IREM de Rouen

CHEVALLARD Y.(1985), *La transposition didactique*, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

Collectif Guéret- Quimper (1988), *La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée...*, IREM de Rouen.

COPIRELEM (Bombannes 1979), *Actes du VIème Colloque des professeurs de mathématiques d'Ecole Normale*, IREM de Bordeaux.

COPIRELEM (Angers 1987), *Actes du XIVème Colloque inter-IREM des PEN*, IREM de Nantes

COPIRELEM (Rouen 1988), *Actes du XVème Colloque inter-IREM des PEN*, IREM de Rouen

COPIRELEM (Bordeaux 1989), *Actes du XVIème Colloque inter-IREM des PEN*, IREM de Bordeaux

COPIRELEM (Paris 1990), *Actes du XVIIème Colloque inter-IREM des PEN*, IREM de Paris 7

COPIRELEM (Cahors 1991), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, I.R.E.M. de Paris 7.

COPIRELEM (Nice 1991 et Besançon 1992), *Actes des XVIIIème et XIXème colloques des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, I.R.E.M. de Besançon

COPIRELEM (Pau 1992), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, I.R.E.M. de Bordeaux.

COPIRELEM (Colmar 1993), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, I.R.E.M. de Bordeaux.

COPIRELEM (Aussois 1993), *Actes du XXème colloque des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, I.R.E.M. de Grenoble

DELBOS G. et JORION P. (1984), *La transmission des savoirs*, Ministère de la Culture et de la Communication, Editions de la Maison des Sciences de L'Homme, Paris.

DEVELAY M (1994,), *Peut-on former les enseignants ?*, Ed ESF, Collection Pédagogies, Paris.

DOUADY R., PERRIN M.J. (1986), *Nombres Décimaux*, Liaison Ecole-Collège, brochure n°62, IREM de Paris 7.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M (1993), *Se former pour enseigner*, 4 tomes, Ed A.Colin, Paris.

DUCEL Y., PELTIER M.L.(1986), *Géométrie, une approche par le dessin géométrique au CM2*, I.R.E.M. de Rouen.

DUCROT O. (1973), *Dire et ne pas dire* , Ed Hermann, Paris

EDS M.ARTIGUE, R.GRAS, C.LABORDE, P.TAVIGNOT, Actes de *Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France (*1994), Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

ERMEL (1977 à 1982), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire,* , 5 tomes, du CP au CM2, Ed Hatier, Paris.

ERMEL, *Apprentissages numériques*, 3 tomes, Grande Section (1990), CP (1991), CE1 (1992), Ed Hatier, Paris.

FAYOL M. (1990), *L'enfant et le nombre du comptage à la résolution de problèmes*, , Ed Delachaux et Nestlé, Genève.

GUITEL G., *Histoire comparée des numérations écrites*, collection Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Ed Flammarion, 1975

HOUDEMENT C, PELTIER M.L. (1992), *Du Petit Ballon au Jeu de Cible,* M.Bidon, I.R.E.M. de Rouen.

HOUDEMENT C, PELTIER M.L.(1992), *La Boîte du Pâtissier,* IREM de Rouen

HOUDEMENT C, PELTIER M.L.(juin 1994), *La machine à partager. Fractions et décimaux au C.M.*, I.R.E.M. de Rouen.

HOUDEMENT C., PELTIER M.L.(1992), "Aires de surfaces planes", *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 2, pp59-64. COPIRELEM Pau, IREM de Bordeaux.

I.N.R.P (1984), *Comment font-ils ?*, Rencontres Pédagogiques n°4, Paris

I.F.M (1987), "Situations-problèmes de Division et Procédures", *Formation des élèves-instituteurs et Didactique des Mathématiques*, IFM, Grenoble.

IFRAH G. (1985), *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention*, Ed Robert Laffont, Paris

I.R.E.M. de Bordeaux, *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire*, Actes de l'université d'été d'Olivet 1988, I.R.E.M. de Bordeaux.

JDI (*Journal des instituteurs*) "Dossier sur le nombre" , numéro de mai 1987, pages 45 à 54, Ed Nathan.

KMETY-MARCHETTI A.M.(1993), *Préparation au Concours de Professeurs des Ecoles*, Editions du Choix

KUZNIAK A .(1994), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7

MALGLAIVE G. (1990) *Enseigner à des adultes*, Ed PUF, Paris.

MYX A.(1977), *6 thèmes pour 6 semaines,* Editions CEDIC

NEYRET R.(1984), "Procédures utilisées par des enfants de cours moyen dans certains problèmes de division", dans *Comment font-ils ?,* pages 15-33, Rencontres Pédagogiques n°4, INRP Paris.

NEYRET R.(1986), "Situations didactiques d'apprentissage de la division : cas des élèves en difficulté" dans *En mathématiques peut mieux faire*, pages 33-55, Rencontres Pédagogiques n°12, INRP Paris.

PEAULT H.(1988), "Division en formation initiale", *Actes du Colloque inter-IREM des PEN de Rouen*, IREM de Rouen, pp 86-93.

PERRENOUD P. (1994), *La formation des enseignants. Entre théorie et pratique*, Ed L'Harmattan

PERRIN-GLORIAN M.J. (1987) "Réflexion a priori sur la formation des maîtres à l'enseignement de la mesure", pp121-130, *Actes du colloque d'Angers*, IREM D'Angers

PERRIN-GLORIAN M.J.(1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*, Thèse de doctorat d'état, Université de Paris 7.

PEZARD M.(1985), *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs*, Thèse de 3ième cycle, Université de Paris7.

ROBERT A. (mai 1994), Essai de synthèse depuis 1992 sur les modules communs en mathématiques à l'I.U.F.M. de Versailles, document de travail.

ROBERT A. et ROBINET J. (mars 1989), *Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement*, Cahiers DIDIREM n°1, Université de Paris 7

TOCHON V.F;. (1992)"A quoi pensent les chercheurs quand ils pensent aux enseignants", *Revue Française de Pédagogie* n°99, pages 89 à 113

TROUSSON A.(1992), *De l'artisan à l'expert, La formation des enseignants en question,* CNDP, Ed Hachette

VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Ed. P.Lang, Berne

Manuels scolaires

CHAPUIS M.coll., *Math CM1, Calcul et Géométrie* (1989), Editions Nathan.
CLAVIER et al. , *Objectif Calcul CM1* (1987), Editions Hatier
COLOMB J. et PERROT G. dir, *Math Hebdo CM1*(1984), Editions Hachette.
EILLER R.dir., *Math et Calcul CM1* (1987), Editions Hachette.
SEMENADISSE et al., *Math CM1 Livre Outil* (1990), Editions Magnard.

Bibliographies par thème de formation

Bibliographie plutôt centrée sur la division...

APMEP Elem-Math 3 (1977), *La Division à l'école élémentaire,* Ed APMEP.

BROUSSEAU G. (1990), *Eléments pour l'étude du sens de la division, Etudes en didactique des mathématiques*, COREM Bordeaux.

BRUN J; CONNE F., LEMOYNE G. (1992), *Schèmes, algorithmes et erreurs de calcul* (Rapport de recherche), Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève.

BRUN J., CONNE F. et al. (juin 1993) "Erreurs, erreurs systématiques et contrôles sémantiques dans l'addition de divisions en colonne" [pré-publication].

CONNE F. (1993), " Du sens comme enjeu, à la formalisation comme stratégie : une démarche caractéristique en didactique des mathématiques" pages 240 et suivantes, *Sens des didactiques et didactique du sens,* Editions CRP, Québec, Canada.

COPIRELEM (Cahors 1991) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques,* tome 1, IREM de Paris 7, page 123.

COPIRELEM (Pau 1992) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques,* tome 2, IREM de Bordeaux, pages 37-42.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.J. (1986),: *Nombres décimaux*, pages 63-76, IREM de Paris 7.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M.(1993), *Se former pour enseigner les mathématiques, 4.Nombres et opérations, fonctions numériques*, pages 53-80 et 91-117, Ed. Armand Colin, Paris.

ERMEL (1979), *Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire CE,* tome 2, pages 266-276, Ed. Hatier, Paris.

ERMEL (1981), *Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire CM*, tome 1, pages 191-223, Ed. Hatier, Paris.

GAIRIN-CALVO Suzy (1987), "Compte-rendu d'un travail réalisé en FP1 à propos de l'apprentissage de la division dans N", dans *Actes du Colloque inter-IREM des PEN d'Angers*, pages 81 à 86, IREM de Nantes.

I.F.M (1987), "Situations-problèmes de division et procédures", *Formation des élèves-instituteurs et Didactique des Mathématiques* (non paginé), IFM, Grenoble.

I.R.E.M BORDEAUX (1985), *La division à l'école élémentaire,* [BRIAND J.], Université de Bordeaux.

KUZNIAK A.(1993), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, pages 104-107, 126-128, 136-146, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

LEVAIN J.P. (1992) : "La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire". *Educationnal Studies in Mathematics* Vol. 23, pages 139-161.

NEYRET R.(1984), "Procédures utilisées par des enfants de cours moyen dans certains problèmes de division", dans *Comment font-ils ?*, pages 15-33, Rencontres Pédagogiques n°4, INRP Paris.

NEYRET R.(1986), "Situations didactiques d'apprentissage de la division : cas des élèves en difficulté" dans *En mathématiques peut mieux faire*, pages 33-55, Rencontres Pédagogiques n°12, INRP Paris.

PARISELLE C. (1986), "Vers l'algorithme de la division au CM1", Revue *Grand N*, n°23, IREM de Grenoble., pages 41-52.

PEAULT H.(1988), "Division en formation initiale", *Actes du Colloque inter-IREM des PEN de Rouen*, IREM de Rouen, pages 86-93.

VERGNAUD G. (1981) : *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Ed. P.Lang, Berne., pages 161-180.

Exemples de manuels scolaires à consulter

CHAPUIS M.coll., *Math CM1, Calcul et Géométrie* (1989), Editions Nathan.

CLAVIER et al. , *Objectif Calcul CM1* (1987), Editions Hatier

COLOMB J. et PERROT G. dir, *Math Hebdo CM1*(1984), Editions Hachette.

EILLER R.dir., *Math et Calcul CM1* (1987), Editions Hachette.

SEMENADISSE et al., *Math CM1 Livre Outil* (1990), Editions Magnard.

Films réalisés en relation avec la division.

BROUSSEAU G. (1973), "Qui dira vingt", film 30 min, Radio-Télévision scolaire CNDP.

BROUSSEAU G., FAUCON E. (1974), "Algorithme de la division", film 30 mn, Radio-Télévision scolaire

Bibliographie plutôt centrée sur la proportionnalité...

BROUSSEAU N.et G (1987), *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*, pages 136-fin, IREM de Bordeaux.

CANU M. et al. (1991), *Math et info au C.M. Voyage aux frontières de l'ensemble de Mandelbrot*, pages 4-34 "L'île de Mandelbrot" et pages 37-38, "Réglage d'un chronomètre", I.R.E.M. de Rouen.

CHARNAY R. (1987), *Des problèmes pour apprendre en CM2 et en 6ème*, pages 26-50, IREM de Lyon.

CHARNAY R. (1988), "Comparaison de situations sur le thème `Agrandissement de figures et proportionnalité`", dans *Actes du Colloque de Rouen*, IREM de Rouen, pages 57-63.

Collectif Guéret- Quimper (1988), *La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée...*, pages 15-29, IREM de Rouen.

COPIRELEM (Pau 1992), *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 2, IREM de Bordeaux, pages 31-56.

C.O.P.R.E.M. (1984), *Contributions à l'enseignement mathématique contemporain*, "La proportionnalité", pages 9-30, CRDP deStrasbourg.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.J (1986), *Liaison Ecole-Collège: nombres décimaux*, brochure n°62, pages 77-fin, IREM de Paris 7.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M. (1993), *Se former pour enseigner les mathématiques*, tome 4, *Nombres et opérations, fonctions numériques*, pages 123-188, Edition Armand Colin, Paris.

DUPUIS C. et PLUVINAGE F.(1981), La proportionnalité et son utilisation, dans *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol.2.2, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

ERMEL (1981), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*, CM, tome 3, chapitre 1, Les fonctions numériques, pages 5-132, Editions Hatier, Paris.

GALAI, GERENTE, GRENIER et RIVOIRE (1990), "Analyse de deux situations-problèmes autour de la proportionnalité", dans *Petit x n°22*, pages 5-22, IREM de Grenoble.

JULO J.(1982), *Acquisition de la proportionnalité et résolution de problèmes*, Thèse de 3ième cycle, Université de Rennes.

LEVAIN J.L. (1992) "Proportionnalité, agrandissement et échelle", *Petit X n°31*, IREM de Grenoble.

LEVAIN J.P. (1992), "La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire". *Educationnal Studies in Mathematics* Vol 23, pages 139-161.

MICHONNEAU J. , PFAFF N.(1990), "La proportionnalité en géométrie: le théorème de Thalès", dans *Petit x n°23*, pages 41-59, IREM de Grenoble.

MINISTERE DE L'EDUCATION (1980), *Contenus de formation à l'école élémentaire, cycle moyen*, pages 53-56, représenter et utiliser les fonctions numériques, CNDP Paris.

PEAULT H. (Pau 1992), "Proportionnalité", dans *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, pages 43-51, COPIRELEM, tome 2, IREM de Bordeaux

PEZARD M.(1985), *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs*, Thèse de 3ième cycle, Université de Paris 7.

SOKONA S.B. (1989), Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation, dans *Petit x n°19*, pages 5-27, IREM de Grenoble.

VERGNAUD G. (1981) : *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Ed. P.Lang, Berne., pages 161-180.

Bibliographie plutôt centrée sur la mesure...

A.P.M.E.P., (1979), *Approximations*, brochure Mots IV, Ed APMEP, Paris.

A.P.M.E.P., (1982), *Grandeur, Mesure*, brochure Mots VI, Ed APMEP, Paris.

CANU M. et al. (1991), *Math et info au C.M. Voyage aux frontières de l'ensemble de Mandelbrot*, pages 4-34 "L'île de Mandelbrot".

BESSOT A., EBERHARD M.(1984), "Une approche didactique des problèmes de la mesure", *Recherche en didactique des mathématiques* n°4.3, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

BKOUCHE et al. (1982), *La rigueur et le calcul,* Ed CEDIC, Paris.

BOURSICOT D., RIPOCHE J.L., *Mesure, Géométrie, Transformations* , pages 8-13, Editions Delagrave, Paris.

C.O.P.I.R.E.L.E.M. (Cahors 1991) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 1, IREM de Paris 7, pages 11-46.

DHOMBRES J. (1978) *Nombre, mesure et continu,* Ed CEDIC-Nathan, Paris.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.J.(1983), *Mesure des longueurs et des aires*, brochure n°48, IREM de Paris 7.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.J.(1985), "Aires de surfaces planes 1ière et 2ème parties", *Petit x* n°6, pages 5-33 et *Petit x* n°8, pages 5-30, IREM de Grenoble.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.J.(1986), *Nombres décimaux,* brochure n°62, IREM de Paris 7.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.J.(1987), "Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane", *Educationnal Studies in Mathematics* Vol 20. n°4, pages 387-424.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M.(1993) *Se former pour enseigner les mathématiques. 2.Maternelle, grandeur et mesure*, chapitre Grandeur et mesure, pages 93-157, Ed.A.Colin, Paris.

ERMEL (1979), *Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire CE,* Mesure, tome 1, pages 98-116, Ed. Hatier, Paris .

ERMEL (1981), *Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire CM,* Mesurage-Repérage, tome 2, pages 171-237, Ed. Hatier, Paris.

ERMEL (1993), *Apprentissages Numériques CE1,* "Des nombres pour mesurer", pages 377-405, Ed. Hatier, Paris.

HOUDEMENT C., PELTIER M.L.(1992), "Aires de surfaces planes", *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 2, pages 59-64. COPIRELEM Pau, IREM de Bordeaux.

HOUDEMENT C., PELTIER M.L.(1994), *La machine à partager. Fractions et décimaux au CM*, IREM de Rouen.

KULA W.(réédition 1984, original 1970), *Les mesures et les hommes*, Ed de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

MYX A (1981), *Métrologie*, IREM de Paris 7.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1987) "Réflexion a priori sur la formation des maîtres à l'enseignement de la mesure", pages 121-130, *Actes du colloque d'Angers*, IREM D'Angers

PERRIN-GLORIAN M.J. (1988), "L'aire et sa mesure", pages 124-140, *Actes de l'université d'été d'Olivet, Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire*, IREM de Bordeaux.

PERRIN-GLORIAN M.J.(1990) "L'aire et la mesure", *Petit X* n°24, IREM de Grenoble.

PERRIN-GLORIAN M.J.(1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*, Thèse de doctorat d'état, Université de Paris 7.

ROGALSKI J. (1983), "L'acquisition des notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface)", *Recherche en Didactique des Mathématiques* n°3.3, pages 343-396, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROUCHE N. (1992), *Le sens de la mesure*, Ed. Didier Hatier, Bruxelles.

SCHNEIDER M.(1991), "Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages des surfaces et des solides", pages 241-294, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°11/23, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, pages 93-107, Ed. P.Lang, Berne.

Bibliographie plutôt centrée sur le nombre entier...

BALACHEFF N., NEYRET N. (décembre 1982), "Bouliers et écritures de nombres au CM", Revue *Grand N* n°28, I.R.E.M. de Grenoble.

BEDNARZ N., JANVIER B.(1984), "La numération", *Grand N* n°33 et n°34, I.R.E.M. de Grenoble.

BIDEAUD J, MELJAC C., FISCHER J.P. (1991), *Les Chemins du nombre*, Presses Universitaires de Lille.

BRIAND J. (1994), *L'énumération*, Thèse de doctorat [à paraître], Université de Bordeaux.

BRISSIAUD R. (1989), *Comment les enfants apprennent à calculer*, Ed Retz, Paris.

BUTLEN D., PEZARD M. (1989), *Calcul mental, calcul rapide*, IREM de Paris 7.

CHARNAY R. (1987), *Des problèmes pour apprendre en CM2 et en 6ème*, pages 7-24, I.R.E.M. de Lyon.

CHICHIGNOUD M.P., "Le développement du concept de nombre chez le jeune enfant", *Grand N* n°36, I.R.E.M. de Grenoble.

DAHAN A., PEIFFER J.(1986), *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, pages 12-30, Ed Points-Seuil, Paris.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M.(1993) *Se former pour enseigner les mathématiques. 3.Numération, décimaux.*, pages 19-62, Ed.A.Colin, Paris.

EL BOUAZZAOUI H. (1982), *Etude des situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numératon*, Thèse de 3ème cycle, Université de Bordeaux.

E.R.M.E.L. (1980), "Numération", dans *Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire,* pages 7 à 18, Ed Hatier, Paris.

E.R.M.E.L, *Apprentissages numériques*, 3 tomes, Grande Section (1990), CP (1991), CE1 (1992), Ed Hatier, Paris.

FAYOL M. (1985), "Nombre, numération, dénombrement. Que sait-on de leur acquisition ?" *Revue Française de Pédagogie* n°70, I.N.R.P., Paris.

FAYOL M.(1990), *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes*, pages 13-103, Ed Delachaux et Nestlé, Lausanne.

FISCHER J.P. (1981) "Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans," *Recherche en Didactiques de mathématiques*, vol. 2.3, Ed La Pensée Sauvage.

GELMAN R. (nov1983)," Les bébés et le calcul", *La Recherche*, Ed Belin, Paris.

GUITEL G.(1975), *Histoire comparée des numérations écrites*, Nouvelle bibliothèque Scientifique, Ed du C.N.R.S.

I.N.R.P (1984), *Comment font-ils*, Rencontres pédagogiques n°4, Paris.

I.N.R.P(1986), *En math peut mieux faire*, Rencontres pédagogiques n° 12, Paris.

I.N.R.P. (mai 1987), Dossier Le nombre, *Journal des Instituteurs* n°9, pages 45-54, Ed Nathan, Paris.

I.N.R.P.(1987), *L'apprentissage à la résolution de problèmes au C.E.*, pages 139-178, Paris.
I.N.R.P. (1988), *Un, deux,...beaucoup, passionnément*, Rencontres pédagogiques n°21, Paris.
I.R.E.M. de Paris 7 (1980), *Histoire des mathématiques pour les collèges*, pages 7-47, Ed Cedic, Paris.
IFRAH G. (1981), *Histoire universelle des chiffres*, Ed Seghers, Paris.
IFRAH G. (1985), *Les chiffres, ou l'histoire d'une grande invention*, Ed Robert Laffont, Paris.
IFRAH G. (1994), *Histoire universelle des chiffres*, Ed Bouquins-Robert Laffont, Paris.
LETHIELLEUX C., (1992), *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux (CP/CE1),* Pratiques Pédagogiques, Ed A.Colin, Paris.
LETHIELLEUX C., (1993), *Le calcul mental au cycle des approfondissements (CE/CM),* Pratiques Pédagogiques, Ed A.Colin, Paris
MELJAC C. (1979), *Décrire, agir, compter*, P.U.F. Paris.
PERRET J.F. (1985) *Comprendre l'écriture des nombres*, Ed Peter Lang, Genève.
VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématiques et la réalité*, pages 81-92 et 109-129, Ed Peter Lang, Genève
WARUSFEL A. (1961), *Les nombres et leurs mystères,* pages 5-59, Ed Points-Seuil, Paris.

Eléments de filmographie (cassettes vidéo) sur des séances de classe
- *Les wagons*, correspondant à la fiche didactique de J.D.I., disponible à l'I.U.F.M. d'Albi (?)
- *Les mathoeufs*, évolution des procédures de comptage de trois enfants au cours d'une séance d'habillage de "mathoeufs", disponible à l'I.U.F.M. d'Albi (?)
- *Qu'en sait-il ? Qu'en fait-il ?* des enfants montrent en entretien individuel leurs compétences numériques (jusqu'où sais-tu compter ? je voudrais que tu m'en donnes...? est-ce que tu peux les compter ? donne moi pareil que ...) ; cassette disponible à l'I.U.F.M. d'Albi (?).

Bibliographie plutôt centrée sur la géométrie...

ARTIGUE M., ROBINET J.(1986), *Conception du cercle chez les élèves de l'école élémentaire*, Rapport de recherche, IREM de Paris 7.

BALACHEFF N., KUNTZMANN J., LABORDE C. (1981), *Formation mathématique des instituteurs*, p.117-140, Ed.Cedic, Paris.

BERTHELOT R. SALIN M.H.(1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* Thèse, Université de Bordeaux 1.

BESSOT A. et VERILLON P. dir. (1993), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble

BETTINELLI B. (1993), *La moisson des formes*, Ed Aléas Editeur, Lyon

BOULE F.(1979) *Espace et géométrie pour les enfants de trois à onze ans*, Ed. Cedic, Paris.

CANU M. et al. (1989), *Math et info au C.M.* tome 1, "Classification des parallélogrammes", pages 37 à 47, IREM de Rouen.

CHEVALLARD Y., JULLIEN M.(1991), "Autour de l'enseignement de la géométrie", première partie, *Petit x n°27*, p.41-76, IREM de Grenoble.

C.O.P.I.R.E.L.E.M. (1983) *Aides pédagogiques pour le cycle moyen Géométrie*, Publications de l'APMEP N°49, Paris.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (Cahors 1992) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, p.47-94, IREM de Paris 7.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (Pau 1993) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome 2, p.87-130, IREM de Bordeaux.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M.(1993) *Se former pour enseigner les mathématiques. 1.Problèmes, géométrie.*, pages 73-175, Ed.A.Colin, Paris.

DUCEL Y., PELTIER M.L. (1986) *Géométrie, une approche par le dessin géométrique au CM2*, IREM de Rouen.

E.R.M.E.L. (1977) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle préparatoire* , pages 99 à112 et pages 236 à 250, Ed. Hatier, Paris.

E.R.M.E.L. (1978) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle élémentaire,* tome1, "Géométrie" pages 47 à 68 et pages 140 à 170, Ed. Hatier, Paris.

E.R.M.E.L. (1982), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen,* tome 3, "Géométrie" pages 133 à 272, Ed Hatier, Paris

GRENIER D.(1990) "Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale", *Recherche en Didactique des Mathématiques* n°10/1, p.5-60, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

GUIBERT A. et al. (1985), *Activités géométriques*, collection Pratiques Pédagogiques, Ed A.Colin

LABORDE C. (1990) "L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques", *Recherche en Didactique des Mathématiques* n°9/3, p.337-364, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

LURCAT L. (1976), *L'enfant et l'espace, le rôle du corps*, P.U.F., Paris

MERCIER A., TONNELLE J. (1991), "Autour de l'enseignement de la géométrie au collège", deuxième partie, *Petit x n°29*, p.15-56 et troisième partie, *Petit x n°33*, p.5-35, IREM de Grenoble.

MYX A. (1977) *6 thèmes pour 6 semaines*, p.257-310, Ed.Cedic, Paris.

PECHEUX M.G. (1990), *Le développement des rapports des enfants à l'espace*, Editions Nathan-Psychologie-Université, Paris.

UNESCO (1987) *Etudes sur l'enseignement des mathématiques. L'enseignement de la géométrie*, vol.5, préparé sous la direction de R.Morris.

Bibliographie plutôt centrée sur les nombres non entiers...

A.P.M.E.P., (1979), *Approximations*, brochure Mots IV, Ed APMEP, Paris.

BOLON J.(1993), "L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire", revue *Grand N* n°52, IREM de Grenoble.

BROUSSEAU G. (1980), "Problèmes de l'enseignement des décimaux", dans *Recherches en didactique des mathématiques* vol. 1/1, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1981), "Problèmes de didactique des décimaux", dans *Recherches en didactique des mathématiques* vol. 2/1, Grenoble

BROUSSEAU N. et G. (1987), *L'enseignement des rationnels et des décimaux dans l'enseignement obligatoire,* Brochure de l'IREM de Bordeaux I.

CANU M. et al. (1989), *Math et info au C.M.* tome 1, "Découverte de π au CM2", pages 25 à 35, IREM de Rouen.

COMITI C. NEYRET R. et al. (1981), "Les décimaux" dans *Revue Grand N*, Mathématiques pour le cycle moyen, numéro spécial, IREM de Grenoble.

C.O.P.I.R.E.L.E.M. (1986), *Aides pédagogiques de l'A.P.M.E.P pour le CM : Décimaux,* publication APMEP

C.O.P.I.R.E.L.E.M (Pau 1993) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome 2, pages 7 à 30 et pages 161 à 176, IREM de Bordeaux.

DAHAN A., PEIFFER J.(1986), *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, pages 43-119, Ed Points-Seuil, Paris.

DHOMBRES J. (1978), *Nombre, mesure et continu*, Ed CEDIC Nathan.

DOUADY R. (1980), "Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire" dans *Recherches en didactique des mathématiques* vol. 1/1, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble..

DOUADY R. PERRIN GLORIAN M.J. (1986), *Nombres décimaux,* Brochure de l'IREM de Paris 7.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M.(1993) *Se former pour enseigner les mathématiques. 3.Numération , décimaux*, pages 65-117, Ed.A.Colin, Paris.

ERMEL (1980), *Apprentissages Mathématiques à l'école élémentaire*, Cycle moyen, tome 2, pages 8 à 168, Ed Hatier, Paris.

GRISVARD C et LEONARD F (1981), "Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs", dans *Bulletin de l'APMEP n° 327,* pages 47-60.

GRISVARD C. et LEONARD F (1983), "Résurgences de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux", dans *Bulletin de l'APMEP n° 340,* pages 450-459.

Groupe HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE des mathématiques (1979), *Introduction du calcul décimal et du système métrique dans la région de Rouen pendant la révolution,* Brochure de l'IREM de Rouen.

HOUDEMENT C., PELTIER M.L. (1994), *La machine à partager, Fractions et décimaux au cours moyen*, I.R.E.M. de Rouen

I.R.E.M. de Paris 7 (1980), *Histoire des mathématiques pour les collèges*, pages 50-89, Ed Cedic, Paris.

ROUCHIER A. et al. (1980) "Situations et processus didactiques dns l'étude des nombres rationnels positifs", *Recherches en didactique des mathématiques* 1/2, pages 225-275.

STEVIN (1585), *La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers, sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes,* Reproduction de textes anciens. Brochure de l'IREM de Paris 7

WARUSFEL A. (1961), *Les nombres et leurs mystères*, pages 77-107, Ed Points-Seuil, Paris.

Bibliographie complémentaire

ALLOUCHE-BENAYOUN J., PARIAT M. (1993), *La fonction formateur*, Editions Privat.

ARTIGUE M. (1989), "Ingénierie didactique", dans *Recherche en Didactique des mathématiques*, volume 9/3, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

ARTIGUE M., DOUADY R., ROBERT A., (1991) *Formation à l'enseignement des mathématiques. Exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique*, brochure IREM n°5, Université de Paris 7.

BACHELARD G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*, Ed. Vrin, Paris.

BKOUCHE R., CHARLOT B., ROUCHE N. (1991), *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Ed A.Colin, Paris

BOURDONCLE R.(janvier 1991), "La professionnalisation des enseignants", première partie, Note de synthèse de la *Revue Française de Pédagogie* n°94, .

BROUSSEAU G. (1983) "Obstacles épistémologiques en mathématiques", dans *Recherche en Didactique des mathématiques*, volume 4/2, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1986) "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", dans *Recherche en Didactique des mathématiques*, vol 7/2, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

BRUNER J.S. (1983) *Le développement de l'enfant. Savoir faire, savoir dire.*, Editions PUF, Paris.

CARAYOL F. (1983) *Comportements d'élèves et de futurs maîtres de l'école élémentaire face à des questions de mathématiques*, Thèse de troisième cycle, Université de Paris 7, IREM de Toulouse.

CHARLOT B., BAUTIER E., ROCHEX J.Y. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Editions Armand Colin, Paris.

CHEVALIER D (sous la direction de, 1991), *Savoir faire et savoir transmettre*, Collection Ethnologie de la France, Editions de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

CHEVALLARD Y. (1990), "Enseignement des mathématiques et besoins professionnels", pp131-155, *Actes du XVIème colloque inter-IREM des PEN* (mai 1989) IREM de Bordeaux.

COLOMB J. dir (1992), *Recherches en didactiques : contribution à la formation des maîtres*, INRP, Paris.

COLOMB J., GUILLAUME J.C., CHARNAY R. (1987), "Articulation école-collège. Quels contrats disciplinaires en mathématiques ?" *Revue Française de Pédagogie* n° 80, Paris

CONNE F. (1992) "Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique", dans *Recherche en Didactique des mathématiques,* vol 12/3, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

DE KETELE J.M., ROEGIERS X. (1991) *Méthodologie du recueil d'informations,* Editions De Boeck Université, Bruxelles.

DOUADY R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques,* Thèse de doctorat d'état, Université de Paris 7.

DOUADY R. (1986), "Jeux de cadres et dialectique outil-objet" , *Recherche en Didactique des mathématiques*, vol 7/2, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY R. (1993) *L'ingénierie didactique*, Cahier DIDIREM n°19, Université de Paris 7.

DOUADY R., ROBERT A. (1991), *Exemples de différentes stratégies de formation,* document de travail pour la formation des enseignants n°5, Université de paris 7.

FAYOL M. (1981), "Former des maîtres. Propositions pour une stratégie", *Revue Française de Pédagogie* n° 55, Paris

GARNIER C. dir.(1991) *Après Vygotski et Piaget,* Editions De Boeck, Bruxelles.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1986) Mémoire de D.E.A de Didactique, Université de Paris 7.

JONNAERT P. (1988) *Conflits de savoirs et didactique*, Editions De Boeck Université, Bruxelles.

LABORDE C. (dir) (1988) *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS C.(1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques,* Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

NOT L (1987), *Enseigner et faire apprendre*, Editions Privat, Toulouse.

PORTUGAIS J. (1992), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants ; le cas des erreurs de calcul.* Thèse n°195, Université de Genève, Suisse.

ROBERT A. (1992) "Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques", dans *Recherche en Didactique des mathématiques* , vol 12/1, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROBERT A. (1992) "Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire. Questions de problématique et de méthodologie", dans *Recherche en Didactique des mathématiques* , vol 12/3, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

SANNER M. (1983) *Du concept au fantasme,* Editions PUF, Paris.

TOCHON F.V. (1993), *L'enseignant expert*, Editions Nathan (Pédagogie),Paris.

VERRET M. (1975), *Le temps des études*, Librairie Honoré Champion, Paris.

Manuels scolaires

- Collection *Atout Math*, CP et CE1, 1989-90, Ed Hachette
- Collection *Chapuis*, *Calcul et Géométrie*, du CP au CM2, 1989-90, Ed. Nathan.
- Collection *Diagonale*, *Math en Herbe*, CP et CE1, 1991-92, Ed. Nathan.
- Collection *J'apprends les Math*, CP et CE1, 1991-92, Ed. Retz.
- Collection *Math et Calcul*, du CP au CM2, 1986 à 1988, Ed. Hachette.
- Collection *Math Hebdo*, du CP au CM2, 1983 à1985, Ed Hachette.
- Collection *Math Livre Outil*, du CP au CM2, 1990, Ed. Magnard Ecoles.
- Collection *Objectif Calcul*, du CP au CM2, 1985 à 1988, nouveaux CP et CE1 en 1992, Ed. Hatier.
- Collection *Thévenet, Découvrir et Calculer*, du CP au CM2, 1983 à 1988, Ed. Bordas.

Table des matières

Table des annexes

Annexes de l'introduction

Annexes de la partie I

Annexes de la partie II

Partie II, Chapitre 1

Partie II, Chapitre 2

ANNEXES

Annexes de l'introduction

Annexe A Extrait des *Actes du 6ème Colloque des Professeurs d'Ecole Normale* (1979), pages 4-5 , IREM de Bordeaux.

Annexe B Texte de la COPIRELEM définissant "principes et contenus de la formation initiale en mathématiques des professeurs d'école" (mars 1994)

Annexes de la partie I

Annexe C "Référentiel des compétences et capacités caractéristiques d'un professeur d'école". Texte de la Direction des Ecoles (31 janvier 1994) aux Recteurs, Inspecteurs d'académie et Directeurs d'IUFM.

Annexe D Extraits de conceptions d'étudiants en première année de formation initiale (promotion FP1 1987 / 88)

Annexe E Programme de mathématiques en formation professionnelle d'instituteurs (extrait du B.O du 9 octobre 1986)

Annexe E Plans académiques de formation de 1991 (applicables en 91 / 92) pour les académies d'Aix, de Caen, de Nantes et de Rennes, transmis par des IUFM de ces académies.

LISTE DE SUJETS

a) Unités centrées sur un thème MATHEMATIQUE.

1. Constructions pré-numériques et pré-mathématiques (Ecole Maternelle)
2. Construction de $(\mathbb{N}, +)$ $(\mathbb{N}, -)$
3. Construction de $(\mathbb{N}, \times)$ $(\mathbb{N}, \div)$
4. Numération
5. Géométrie
6. Décimaux
7. Probabilités-statistiques
8. Problèmes, situations
9. Variables - Logique
10. Mesure
11. Fonctions et représentations

b) Unités centrées sur un sujet de DIDACTIQUE proprement dite :

- finalités et objectifs de l'enseignement des mathématiques
- pédagogie par objectifs et évaluation en mathématiques et contrat didactique
- situations et processus didactiques fondamentaux
- les théories de l'apprentissage et de la connaissance
- théorie de l'enseignement des mathématiques
- mathématique et applications
- épistémologie et histoire des maths
- les problèmes et l'enseignement des mathématiques
- les jeux et les mathématiques
- mathématique, langage et formalisation
- les erreurs et les échecs en mathématiques
- diagrammes, schémas, organigrammes
- les calculateurs électroniques et l'enseignement des maths.

c) Unités centrées sur les caractéristiques des ENFANTS :

- adaptation aux différences individuelles en mathématiques (enseignement collectif, enseignement individuel, différents types de groupes)
- les enfants marginaux : déficients intellectuels, "surdoués", échecs électifs
- mathématique et psychologie génétique
- mathématique en première année d'école élémentaire : objectifs, activités, moyens, évaluation)
- les mathématiques en 2ème année, etc...

.../...

d) Unités centrées sur un sujet relatif au "SYSTEME EDUCATIF" et aux maîtres

- les programmes de mathématiques et les instructions : comment les interpréter, les lire ?
- les préparations de mathématiques : répartition, horaires,
- les moyens matériels de l'enseignement des mathématiques (listes de matériel, bibliographie)

e) Unités centrées sur la DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES, PRATIQUE ET EXPERIMENTALE :

- construction d'une situation didactique (pour l'enseignement d'une notion ou d'un concept)
- organisation d'une expérience sur l'enseignement des maths (l'observation des faits didactiques)
- compléments de statistique et de docimologie pour l'analyse de l'enseignement
- les styles d'enseignement et les mathématiques
- la réalisation et la conduite d'une leçon de mathématiques
- Analyse des savoir-faire à la fin d'un niveau.

f) Unités centrées sur des ACTIVITES DIVERSES où les mathématiques jouent un rôle :

- mathématiques et activités manuelles
- mathématique et géographie
- mathématique et économie
- mathématique et art
- biologie, physique, etc...
- mathématique et langage mathématique
- panorama des mathématiques actuelles
- structure mathématique et rôle de l'enseignement.

Ces unités, plutôt que d'être objets d'études académiques, suggèrent aux élèves-maîtres des sujets d'étude à entreprendre avec leurs enfants et susceptibles de les éveiller aux démarches scientifiques.
Les parties théoriques de ces unités ont seulement pour objet de permettre à l'étudiant d'avoir, sur le sujet scientifique touchant aux mathématiques, une certaine culture générale.

Proposition de texte, définissant les principes et les contenus de la formation initiale en mathématiques des futurs professeurs d'école, réalisée par la COPIRELEM[1], en mars 1994.

PRINCIPES, OBJECTIFS ET METHODES.

L'enseignement des mathématiques s'adresse à des étudiants ayant suivi des cursus universitaires variés, donc de niveaux scientifiques divers. Il s'intègre à une formation pluridisciplinaire nécessitée par la polyvalence du métier de professeur d'école.

Cet enseignement est donc résolument orienté vers la préparation professionnelle, ce qui implique à la fois un approfondissement de certaines des connaissances mathématiques que les professeurs d'école auront à enseigner et un corps de connaissances particulières, de nature plus didactique et épistémologique.

Les contenus s'appuient sur l'étude des concepts mathématiques permettant une bonne compréhension des notions à enseigner dans le premier degré, en rapport avec les situations d'apprentissage. Dans le cas où certains étudiants rencontrent des difficultés dans la maîtrise de ces savoirs, il convient de leur proposer un module complémentaire dit "de soutien" : celui-ci est centré sur les connaissances directement nécessaires au cours, et non sur le rattrapage d'un hypothétique niveau mathématique général minimum.

Ces concepts sont vus à travers des études de phénomènes d'enseignement, des approfondissements mathématiques, des analyses historiques et épistémologiques, éclairés par des outils de la didactique.

L'enseignement se structure autour d'activités telles que :
- résolution de problèmes ;
- observations de classes et d'élèves, en situation de travail mathématique ;
- exercices de préparation, de conduite et d'analyse de séances, en liaison avec des maîtres-formateurs ;
- analyses de supports pédagogiques (manuels, fichiers, logiciels, didacticiels, jeux éducatifs, matériels, moyens audiovisuels, instruments d'évaluation,...),
- études de textes extraits de revues pédagogiques et de comptes rendus de recherches,
- analyses d'exercices et de réponses d'élèves,
- et bien sûr nombreux exercices mathématiques.

[1] COPIRELEM, Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement (et la formation à l'enseignement) élémentaire, responsable Denis BUTLEN.
Adresse : IREM de Paris 7, Université Denis Diderot, Tour 56/55, 3° étage,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05
Tél : 44 27 53 83 / 53 84 Télécopie : 44 27 56 08

CONTENUS DE FORMATION

- La construction du nombre et des opérations arithmétiques

Notions mathématiques, historiques, épistémologiques nécessaires à cet enseignement sur :
- nombre entier et numération ;
- structures additives ;
- structures multiplicatives.

Analyse et construction de situations d'apprentissage.
Elaboration de procédures de calcul (calcul mental, algorithmes écrits des opérations arithmétiques, utilisation de la calculatrice) : analyse mathématique et didactique.

- Fonctions numériques

Fonctions linéaires, fonctions affines et quelques autres.
Cas de la proportionnalité :
- son enseignement à l'école : un exemple de transposition didactique ;
- différents points de vue : fonctionnel, scalaire, graphique, géométrique (agrandissement, réduction, lien avec le théorème de Thalès).

- Extension de la notion de nombre entier

Connaissance des rationnels (et des décimaux). Insuffisance des rationnels : approche des réels, approximation des réels par les décimaux.
Construction de situations d'approche des rationnels à l'école élémentaire.
Exemple d'analyse épistémologique : la construction des décimaux à partir des rationnels ; conséquences possibles pour les choix d'enseignement à l'école.

- Géométrie

Connaissances géométriques de base : caractérisations et constructions de figures simples à la règle et au compas (et utilisation d'autres instruments : équerre, gabarit, rapporteur,...) ; théorèmes de Pythagore et de Thalès ; quelques utilisations simples de transformations ponctuelles du plan (isométries et homothéties planes) ; étude de solides simples, sections et projections planes de solides simples.
Analyse et construction de situations d'apprentissage portant sur :
- la reproduction d'objets du plan ou de l'espace (avec divers matériels et contraintes),
- la description d'objets (pour une utilisation fonctionnelle du vocabulaire)
- la représentation d'un objet de l'espace sur un plan,
- la construction d'objets du plan ou de l'espace (synthèse de la description et de la représentation).

Rapports entre connaissances spatiales et savoirs géométriques.

- Grandeur, mesure

Aspects mathématiques, historiques, épistémologiques.
Un exemple de construction d'une grandeur et de construction d'une mesure (aire, longueur, masse,..).
Cas particulier du système métrique, unités légales et usuelles.

Chaque fois qu'une notion mathématique s'y prête particulièrement, on aborde les questions de **raisonnement :** argumentation, preuve, démonstration.

A propos des thèmes précédents, les différents aspects de la **résolution de problèmes** sont mis en évidence :
- sa place dans la construction des mathématiques (point de vue épistémologique),
- son rôle dans la construction des connaissances (point de vue cognitif),
- ses fonctions dans l'enseignement (point de vue didactique et professionnel).

A l'occasion de situations d'enseignement et à partir d'activités portant sur les thèmes définis ci-dessus, on utilise et explicite différents **outils de la didactique des mathématiques** afin d'aider les étudiants à :
- comprendre ce qui caractérise une situation de référence relative à une notion ou à une famille de notions,
- commencer une analyse a priori, identifier les cadres,
- reconnaître les variables d'une situation et parmi celles-ci les variables didactiques,
- différencier situations d'apprentissage et situations de contrôle,
- identifier différentes phases d'une situation d'apprentissage,
- analyser des procédures d'élèves et des types d'erreurs relativement à un savoir donné (la notion d'obstacle sera traitée à cette occasion).
- repérer certains phénomènes de contrat.

Cette formation prend en compte les programmes du premier degré et du premier cycle des collèges, l'organisation des différents cycles de l'école, les compétences attendues à la fin de chaque cycle en mathématiques.

FINALITES DE LA FORMATION

Les objectifs fondamentaux de la formation sont :

- rendre les étudiants capables
    * de construire des situations d'enseignement y compris sur des thèmes non traités en formation,
    * d'intégrer les mathématiques dans un projet global d'enseignement,
    * d'adapter leur enseignement aux différents publics d'élèves (secteurs citadin, rural, de banlieue,...),
    * d'analyser et de prendre en compte des difficultés des élèves et l'hétérogénéité des classes,
    * de développer une réflexion critique sur les pratiques professionnelles, les manuels scolaires et les documents pédagogiques.

- sensibiliser les étudiants à l'intérêt et l'efficacité du travail d'équipe,

- rendre les étudiants
    * curieux des publications récentes et des résultats de recherche,
    * aptes à modifier leurs pratiques en liaison avec les résultats de recherches,
    * sensibles à l'importance et à l'intérêt d'une formation continuée.

REMARQUES

- Une estimation horaire minimum de la formation en mathématiques des futurs professeurs d'école, raisonnable (mais pouvant être avantageusement dépassée) serait de 150 heures, réparties sur deux ans.
- Les contenus de formation précisés ci-dessus ne pourront sans doute pas être tous étudiés en formation initiale. Les choix sont à la charge de chaque I.U.F.M..
- La formation des enseignants nécessite, pour être efficace, une organisation en groupes d'effectifs limités.
- Si le nombre de candidats à la formation dépasse la capacité d'accueil de l'I.U.F.M., il est souhaitable de soumettre les étudiants à un test d'entrée portant sur des compétences disciplinaires. Pour les mathématiques, les questions relèvent des contenus de formation antérieurement cités (et non d'un corps de connaissances sans lien avec les mathématiques de l'école élémentaire.
- Afin d'assurer la cohérence de la formation, il est indispensable de mettre en place des dispositifs institutionnels favorisant la liaison entre les différents acteurs de la formation (enseignants-chercheurs, PIUFM, IMF,...). La constitution d'équipes de formation et de recherche pluri-catégorielles enrichit la réflexion et structure la formation.

Paris, 19 mars 1994

REFERENTIEL DES COMPETENCES ET CAPACITES CARACTERISTIQUES D'UN PROFESSEUR D'ECOLE

PREAMBULE

Le professeur d'école est un fonctionnaire porteur des valeurs de la République. Il connaît les exigences de la fonction enseignante et de la responsabilité qui s'y attache, et comprend l'importance d'une éthique professionnelle.

PRINCIPES GENERAUX

- Le professeur d'école est un maître polyvalent, capable d'enseigner l'ensemble des disciplines dispensées à l'école primaire

- il a vocation à instruire et éduquer de la petite section de maternelle au CM2.

- il exerce un métier en constante évolution

I.- LE PROFESSEUR D'ECOLE DOIT ETRE CAPABLE D'ENSEIGNER A TOUS LES ELEVES DE L'ECOLE PRIMAIRE

- il doit posséder une culture générale lui permettant de maîtriser les grands concepts relatifs aux disciplines enseignées à l'école maternelle et élémentaire (espace, temps, démarche scientifique, système de numération, fonctionnement de la langue...) et, bien entendu, maîtriser clairement les connaissances de base des langages fondamentaux (orthographe, expression écrite, mécanismes opératoires, proportionnalité...)

- il doit être capable d'initier ses élèves à une langue vivante, étrangère ou régionale.

- il doit nécessairement posséder des connaissances et des outils d'enseignement relatifs à toutes les disciplines qui sont au programme des écoles (français, mathématiques, sciences et technologie, histoire et géographie, éducation civique, éducation artistique, éducation physique et sportive)

- il doit mettre au service de cet enseignement une connaissance du développement de l'enfant et des processus d'apprentissage.
A cet effet, il doit connaître parfaitement les étapes du développement de l'enfant, avoir une bonne connaissance des principales théories et des modèles d'apprentissage, et être en mesure de repérer, d'analyser les difficultés individuelles les plus courantes et d'y remédier.

II.- LE PROFESSEUR D'ECOLE DOIT ETRE CAPABLE D'ENSEIGNER DANS UNE CLASSE

- il doit savoir créer une dynamique de classe et l'exploiter pour développer toutes les potentialités des élèves.

  - faire de l'élève un acteur des projets de classe
  - développer les aspects sociaux: entraide, coopération, écoute de l'autre...

.../...

- il doit évaluer et gérer les apprentissages des élèves

  - utiliser des techniques de classe (du tableau à la BCD, en passant par l'ordinateur)
  - savoir choisir un manuel et justifier ce choix
  - analyser les besoins
  - établir une progression
  - associer l'élève à sa propre progression et expliciter avec lui les objectifs à atteindre
  - repérer des difficultés et des compétences individuelles
  - mesurer des progrès
  - proposer un accompagnement méthodologique
  - mesurer l'efficacité de son enseignement

- il doit savoir définir des exigences pour tous les élèves et s'adapter à leur diversité, par l'élaboration de plans d'action pédagogique diversifiée, en tenant compte des performances et des capacités individuelles.

  - définir les objectifs à atteindre
  - énoncer sa propre stratégie
  - prévoir ses démarches et les supports de l'action
  - estimer la durée
  - élaborer les modalités d'évaluation de l'action
  - communiquer le bilan des opérations

III.- LE PROFESSEUR D'ECOLE DOIT ETRE CAPABLE D'ENSEIGNER DANS UNE ECOLE

- il doit assurer la continuité et la cohérence des apprentissages, par un travail en équipe des maîtres, dans le cadre d'un projet d'école et d'un projet de cycle.

- il doit connaître la place de l'école dans le système éducatif et dans la société.

  - *la famille et l'école*: l'information des familles, la place des parents à l'école, leur participation à la vie de l'école
  - *le quartier et l'école:* la santé, la police, la justice, la sécurité, les associations
  - *les collectivités locales:* prioritairement la commune

- il doit connaître les relations entre l'école et son environnement social, économique et culturel, en vue d'adapter son enseignement à la diversité des classes et des écoles.

  - *les autres ordres d'enseignement* et en priorité le collège
  - *l'administration de l'éducation nationale*, et en priorité ce qui est relatif à l'école (programmes, horaires, instructions officielles, personnel, textes réglementaires...) mais aussi à l'histoire, au fonctionnement du système...

CONCLUSION

Quelles que soient les situations d'exercice de ce métier, il convient que le professeur d'école

- porte un regard positif sur l'enfant
- développe une attitude réflexive sur sa pratique
- donne une dimension sociale au métier d'enseignant

. Pour moi les maths c'est : un science austère cartésienne et souvent figée.

. Ce qui peut faire qu'on ait du mal en math : - assimilation des types de raisonnement, utilisation des signes ..., la démonstration.

. Ce que j'aimerais apprendre en math

. Ce que je n'aime pas quand on m'enseigne les math : Le fait que cela semble si simple pour celui qui a compris.

. Quand je pense que je vais devoir enseigner les math : Devoir se munir d'un maximum de patience.

. Ce que j'aimerais donner comme image des math : l'image de la recherche d'un résultat une forme de jeu : Trouver la solution !

---

pour moi les maths c'est une science où il faut non seulement de la rigueur mais aussi apprendre beaucoup trop par coeur (longtemps on se contente d'apprendre et non pas de comprendre)

Ce qui peut faire qu'on ait du mal en math est souvent un manque de bases (les lacunes s'accumulent)

ce que je n'aime pas qu'on m'enseigne en math : les formules toutes faites sans explications dans la manière d'arriver au resultat (je pense que les maths ne sont pas une croyance absolue)

Ce que j'aimerais apprendre en math : la logique, la géométrie

Ce que j'aimerais donner comme image des maths : ce n'est pas une matière uniquement faite pour les "bons en maths" mais accessible à tous. c'est tout d'abord une matière qui nécessite de la logique alors qu'on l'apprend comme une verité en elle même (le recours des profs aux élèves faibles est de dire : vous pouvez utilisez telle ou telle formule dans tel cas sans en expliquer les raisons)

Pour moi, les maths c'est: ma bête noire et parfois du charabia

Ce qui fait qu'on ait du mal en maths: manque d'intérêt, surtout. Difficulté à en percevoir la finalité. Côté rigoureux, rigide. Dégoût pour les chiffres, les calculs.

Ce que j'aimerais apprendre en maths: connaître les bases utiles pour l'enseignement en primaire, et aussi les méthodes pédagogiques qui s'y rattachent.

Ce que je n'aime pas quand on m'enseigne les maths: que l'on aille trop vite, alors que les bases ne sont pas acquises (je perds pied rapidement

Quand je pense que je vais devoir enseigner les maths: j'en ai des frissons d'horreur! (j'exagère) je me demande comment je vais supporter d'enseigner une matière qui ne m'enthousiasme guère – Il va falloir que j'essaie d'y prendre goût.

Ce que j'aimerais donner comme image des maths: une matière utile, dans la vie de tous les jours, pour le développement de l'esprit logique, et pour, peut-être, les études futures. Une matière que certains peuvent aimer, et qui peut donner du mal à d'autres, (ce qui n'est pas dramatique)

Pour moi, les math c'est: un esprit logique capable de resoudre des problèmes d'algèbre ou de géométrie

Ce qui peut faire qu'on ait du mal en math:
. un manque de compréhension des textes des problèmes
. les leçons sont peu approfondies, le vocabulaire est mal maitrisé.

Ce que j'aimerais apprendre en math: une façon de pallier l'échec scolaire, des méthode d'enseignement.
une revision des math de CM_2 et de 6^e.

Ce que je n'aime pas quand on m'enseigne les math: Il faut assimiler d'abord la leçon avant de faire des exercices

Quand je pense que je vais devoir enseigner les math, je ne connait pas le programme de CM_2 ni les differentes méthodes pour enseigner la géometrie pour la rendre moins rébarbative.

Ce que j'aimerais donner comme image des math: c'est un jeu qui permet de developper la rapidité de l'esprit. Aimer resoudre des problème – valoriser les élèves.

Programme MATH FP BO 9 octobre 1986

Formations disciplinaires.

Ce domaine de la formation a pour objet l'étude des aspects scientifiques, méthodologiques et didactiques des disciplines enseignées à l'école élémentaire. Chaque fois que cela sera possible et utile, il sera donné aux élèves-instituteurs un aperçu sur l'histoire des disciplines et de leur didactique.

De plus, on veillera à préparer les élèves-instituteurs à mener à bien les activités prévues pour l'école maternelle et liées à ces disciplines, bien que le rappel n'en soit pas fait, chaque fois, dans les programmes de formation. Une coordination entre les enseignants chargés des formations disciplinaires et ceux chargés spécialement du domaine de l'école maternelle (cf. §.1.12) est donc nécessaire. Il est souhaitable, également, pour assurer à la formation des maîtres une unité suffisante, que chaque enseignant prenne soin de faire apparaître les relations possibles entre sa discipline et les autres, tant d'un point de vue scientifique et méthodologique que didactique.

Les démarches, méthodes et outils pédagogiques.

La pédagogie générale a pour objet l'étude des principes généraux et des grandes conceptions de la pédagogie. Elle ne saurait se confondre avec l'étude des démarches, méthodes et procédés pédagogiques particuliers, ni les dicter. Leur découverte, leur évalutation et, le cas échéant, leur apprentissage, doivent être réalisés dans le cadre de l'enseignement de chaque discipline et de sa didactique. Il faut éviter de se contenter d'idées générales pour guider l'action pédagogique, mais en revanche, encourager les élèves-instituteurs à étudier l'adaptation des moyens pédagogiques aux situations scolaires particulières. On cherchera à leur faire acquérir, à propos de chacune de ces situations, une panoplie de moyens et d'outils, riche et diversifiée, en sorte d'exercer leur capacité à les choisir et à les transformer, et à en élaborer de nouveaux.

Ainsi, les diverses manières dont les moyens informatiques, audiovisuels et technologiques, en général, peuvent constituer des aides pédagogiques, et même caractériser des démarches d'ensemble, doivent être examinées dans la pédagogie générale (au titre des principales conceptions et méthodes pédagogiques, aussi bien que des recherches actuelles). Toutefois, c'est dans le cadre des disciplines, sans faire l'objet d'une présentation générale, mais à propos de l'étude méthodologique et didactique de sujets déterminés d'enseignement à l'école élémentaire ou maternelle, que les produits informatiques ou audiovisuels particuliers seront présentés, analysés, comparés, évalués, et que l'on étudiera, le cas échéant, les moyens de les transformer ou d'en produire de nouveaux.

Il en va de même des outils méthodologiques généraux et des ressources documentaires, dont la nature et la richesse varient selon les domaines, et seront présentés dans le cadre des situations particulières d'enseignement qui justifient que l'on y recoure.

2.02 Mathématiques (135 h).

L'enseignement des mathématiques doit permettre à l'élève-instituteur d'établir un lien entre théorie et pratique, d'analyser des documents ou des manuels, et de comprendre le développement de la pensée logique de l'enfant.

Il convient de consolider les connaissances en relation avec les Programmes et Instructions et d'adapter la formation à l'école normale aux compétences acquises antérieurement.

1. Contenus relatifs à la discipline.

— *Structures algébriques de base* : loi interne, structure de groupe, groupe cyclique en liaison avec la géométrie.

— *Arithmétique* : ensembles équipotents, ensembles finis, cardinaux. Etude de N (génération, ordre, opérations, numérations ; dénombrement, congruences) - Combinatoire - Probabilités simples.

— *Décimaux et rationnels* : introduction, ordre, opérations ; approximations ; complétion de Q.

— *Relations, applications, fonctions* : équivalence et ordre ; fonctions et variables (croissance, taux, interpolation, extrapolation) ; fonctions linéaires (proportionnalité) polynôme, exponentielle - Paramètres. Mise en équation - Représentation graphique.

— *Géométrie* : formes géométriques (dans le plan et dans l'espace). Relations entre éléments géométriques. Propriétés de Thalès et de Pythagore. Transformations géométriques simples (isométrie, homothétie, affinités).

Constructions de figures. Développement d'un solide. Frises et pavages. Déplacement sur quadrillage.

— *Langage et raisonnement* : le langage mathématique. Logique : propositions et connecteurs. Typologie des modes de raisonnement et des démarches.

— *Eléments d'histoire des mathématiques*. Genèse des notions, des contenus, des pratiques.

2. Aspects didactiques et pédagogiques.

— *Développement* de la pensée logique de l'enfant.

— *Mise en relation* avec les théories psychologiques et didactiques. Etat actuel des connaissances (courants psychologiques et épistémologiques).

— *L'activité mathématique* : résolution de problèmes ; découverte de nouvelles notions en réponse à des problèmes.

— *Aspects pédagogiques* : étude des pratiques pédagogiques aux différents niveaux de l'école élémentaire et pré-élémentaire.

— Elaboration d'une progression sur un thème donné ou recherche sur un sujet particulier de didactique, réalisées par chaque élève-instituteur, en liaison avec les stages.

3. Mathématiques appliquées.

— *Mesure et mesurage* : mesure de longueur, aires, volumes, masses, capacités, durées, températures. Techniques de mesurage. Erreurs et encadrements.

— *Liaisons avec la technologie* : objet technique. Mécanique.

— *Orientation* : utilisation d'une carte, navigation. Eléments d'astronomie.

— *Eléments de statistique* : divers modes de représentation, lecture et interprétation.

4. Informatique.

— *Notions d'informatique* : algorithmes, organigrammes. Eléments de programmation. Procédure.

— *L'outil informatique* : traitement d'un problème, introduction de notions nouvelles.

AIX 92-93 PE1 72 heures (+20R MAN)

MATHEMATIQUES

Préambule :

Les travaux à caractère didactique sont étudiés au fur et à mesure du déroulement du travail mathématique proprement dit ; ils ne porteront pas sur les apprentissages du cycle 1.

Seront particulièrement pris en compte et analysés les résultats de l'évaluation nationale CE2 et 6ème : exercices d'analyse d'erreurs ou d'échecs et propositions de re-médiation, correction de cahiers de maths, etc...

Définition et critique d'une pédagogie constructiviste utilisant les interactions entre pairs.

La lecture des documents officiels : "Les cycles à l'école primaire" et "Programmes, Instructions Conseils" tous deux chez Hachette écoles, est recommandée aux étudiants.

MODULE 1 : LE NUMERIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

Etude de N : numération, ordre, écriture des nombres dans une base, puissances de dix.
Lois de composition, propriétés et techniques opératoires, calcul réfléchi.
Diviseurs, multiples, décomposition en facteurs premiers, critères de divisibilité.
La division euclidienne.
Rationnels, décimaux, approximation décimale et opérations dans D.
La proportionnalité.

MODULE 2 : LE GEOMETRIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

Plan, droite, mesure de longueurs et mesure des angles.
Construction de triangles, de droites particulières dans le triangle, éléments remarquables dans le triangle, triangles remarquab les.
Construction de parallèles, Thalès, division d'un segment dans un rapport donné.
Propriétés, classement des quadrilatères usuels.
Formulaire des périmètres, aires et volumes. Développement du cube.
Transformations géométriques : isométries (symétries, translation et leurs compositions). Axes de symétrie des figures usuelles.

athématiques - 1ère année

Académie de RENNES 92-93

	Module de complément de polyvalence (80h)	Module d'approfondissement (150 h)	
	Tronc commun (préparation au concours)		
Objectifs prioritaires de formation	Le but de la préparation au concours est de développer chez le candidat : - les qualités de raisonnement logique, l'aptitude à utiliser des outils mathématiques, à interpréter des résultats dans les domaines numérique et géométrique et à formuler leur pensée en utilisant les différents modes d'expression et de représentation. - la connaissance des objectifs et des programmes de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, ainsi qu'une bonne appréciation des approches didactiques et des démarches pédagogiques correspondantes.		
	Volet notionel (44 h) +	*Volet didactique* (36 h)	
	Dominer les contenus mathématiques	Savoir observer l'élève face à l'activité mathématique Savoir reconnaître dans la mise en place d'une situation d'enseignement les variables didactiques influant sur les procédures de résolution des élèves.	
Notions	Problèmes numériques Proportionnalité Ensemble de nombres; systèmes de numération Géométrie (figures, isométries, démonstration) Mesure	Les nombres décimaux	
Méthodes	Bilan des connaissances, compléments personnalisés, résolution de problèmes	Analyse a priori de situations Observations d'élèves Construction de situations de classe	
		Mathématiques pour l'étudiant (20h)	Mathématiques dans les classes (20h)
		Approfondissement sur 2 thèmes : 1 - Dénombrement 2 - Argumentation, démonstration, rédaction	Préparation, rédaction, analyse de séquences en classe sur le thème des décimaux.

Académie de CAEN 92-93
(60 heures + 40h MAN)

Programme : Mathématiques

I Contenu mathématique (PE1)

Les notions ci-dessous doivent pouvoir être utilisées dans la résolution d'exercices et de problèmes.

1) Activités numériques

1-1 Pratique des opérations sur les nombres entiers, décimaux et rationnels
1-2 Passage d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et inversement
1-3 Division euclidienne
1-4 Existence des nombres réels
1-5 Approximation d'un nombre rationnel, valeur approchée; ordre de grandeur; arrondi; troncature; encadrement.
1-6 Utilisation des puissances
1-7 Usage de la calculatrice

2) Ecriture littérale

2-1 Notion d'égalité
2-2 Transformation d'écritures, parenthésage.
2-3 Mise en équation (1er degré)
2-4 Résolution d'équations et d'inéquations (1er degré)
2-5 Systèmes d'équations du 1er degré.

3) Relations numériques. Proportionnalité

3-1 Gestion de données
- Lecture et utilisation de tableaux de données
- Classement de données
- Représentations graphiques diverses (diagrammes circulaires, en bâtons, histogrammes, courbes, schémas)

3-2 Fonctions numériques
Variation
Représentations graphiques

3-3 Fonctions linéaires. Fonctions affines
- Propriétés
- Représentations graphiques. utilisation
- Proportionnalité

3-4 Echelles. Pourcentages

4) Géométrie dans l'espace

4-1 Construction, développement, représentations de solides.
exemples: pavés droits, prismes, polyèdres, pyramides régulières, cylindres, cônes.
4-2 La sphère
4-3 Calcul de distances.
4-4 Aires et Volumes des objets cités ci-dessus.
4-5 Incidence et parallélisme
4-6 Orthogonalité

5) Géométrie plane

5-1 Configurations fondamentales

- Reproduction. Description. Représentation. Construction de différents objets géométriques: Les polygones. Le triangle, ses droites, ses angles. Le cercle, ses tangentes.
- Reproduction de dessins complexes. Utilisation des instruments (papier calque, quadrillé, règle, équerre, compas, gabarits...)
- Distance. Inégalité triangulaire, théorème de Pythagore.
- Angles. Mesure des angles. Angles d'un polygone
- Vocabulaire géométrique

5-2 Les transformations

- Application à des objets géométriques des transformations ponctuelles: symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie.
- Propriétés de ces transformations
- Composées de ces transformations

5-3 Géométrie analytique

- Coordonnées d'un point
- Calcul de distances

II Notions didactiques

- Objectifs, progression

- Contrat didactique
- Variables didactiques
- Situations-problèmes
- Situations d'action, de formulation, de validation, d'institutionnalisation
- Dialectique outil-objet

Ces notions doivent pouvoir être réinvesties dans l'analyse de documents pédagogiques portant sur les trois cycles de l'Ecole Elémentaire.

Académie de NANTES
IUFM des Pays de la Loire
1992-93

Professorat des Ecoles
FORMATION EN MATHÉMATIQUES
première année

I. OBJECTIFS ET MÉTHODES

La formation en mathématiques sera résolument orientée vers la préparation professionnelle des professeurs des écoles, ce qui implique à la fois

- un approfondissement spécifique des connaissances mathématiques qui seront à enseigner
- un corps de connaissances particulières de nature plus didactique et épistémologique.

Cette formation doit, en particulier, permettre aux étudiants de lire et analyser les documents didactiques écrits pour les enseignants, de resituer l'apprentissage des notions mathématiques dans une perspective plus large que celle d'une classe ou d'un cycle.

L'enseignement des mathématiques ne peut donc se limiter à une simple étude des problèmes qui sont proposés à l'école primaire. Il ne peut davantage être une simple reprise de l'étude des connaissances théoriques abordées au collège ou au lycée.

Les contenus mathématiques seront étudiés en résolvant des problèmes de nature à assurer une bonne compréhension des notions à enseigner dans le premier degré. Cela doit permettre au futur professeur des écoles de mobiliser ses connaissances disponibles et, par là, de les consolider et les enrichir.

L'épreuve du concours évaluera les connaissances et compétences de l'étudiant en tenant compte des enjeux de la formation.

Les concepts de mathématique seront abordés dans le cadre de travaux pouvant intégrer

- l'étude de leur genèse et leur évolution historique,
- l'étude des programmes, des compétences attendues chez les élèves en fin de cycle,
- l'étude de situations d'apprentissage,
- l'analyse de productions d'élèves,
- l'analyse des outils mis à disposition des maîtres de l'école primaire.

La formation s'appuiera en particulier sur des activités telles que :

- observations de classes et d'élèves,
- préparation, conduite et analyse de séquences,
- analyse de supports pédagogiques,
- analyse d'exercices et de réponses d'élèves.

II. CONTENUS

1 - Connaissances dans le domaine mathématique

1.1 domaine numérique

- numération sur les entiers
- décimaux et rationnels
- structures additives et multiplicatives
- fonctions numériques et proportionnalité

1.2 domaine géométrique

- figures géométriques élémentaires du plan
- constructions élémentaires

1.3 Méthodologie de la résolution de problèmes

2 - Compétences dans le domaine didactique

2.1 A propos de documents pédagogiques présentant des situations d'apprentissage :

- analyse des contenus mathématiques sous-jacents
- détermination des objectifs visés
- analyse de l'activité et des tâches demandées aux élèves
- analyse a priori de procédures attendues de la part des élèves
- analyse critique des démarches pédagogiques

2.2 Analyse de productions d'élèves

- caractérisation et classification de procédures observées
- étude d'erreurs et recherche de causes.

III. ORGANISATION ET DURÉE

D'une durée de 60 h, la formation sera organisée en modules. Un de ces modules, d'une durée de 15 h, pourra être choisi dans une liste proposée dans chaque centre en fonction du nombre d'étudiants et des possibilités locales.

Pour les étudiants très en difficulté, des modules supplémentaires de mise à niveau pourront être suivis dans la limite de l'horaire global attribué à la mise à niveau.

Annexes de la partie II

Annexes du chapitre 1 de la partie II

Annexe G : Exemple d'une séquence de calcul mental (2 pages)

Annexe H : Exemple d'une séquence sur classement, rangement (et les deux jeux de cartes) (3 pages)

Annexe I : "Assemblages de triangles" (2 pages)

Référence : COPIRELEM (Cahors 1991) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 1, IREM de Paris 7, pages 49-52 ou.*La Boîte du Pâtissier*, (1992), C.Houdement, M.L.Peltier, IREM de Rouen, pages 21-26.

Annexe J : "Le solide caché" (3 pages)

Référence : *La Boîte du Pâtissier*, pages 7-12.

Annexe K : Le questionnaire pour les formateurs

Annexes du chapitre 2 de la partie II

Annexe L : "Pavage et P.G.C.D" (3 pages)

Référence :: COPIRELEM (Pau 1992) *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des Mathématiques*, tome 2, IREM de Bordeaux, pages 37 à 42.

ou C.Houdement, M.L.Peltier (1992), *La Boîte du Pâtissier*, IREM de Rouen, pages 53 à 61.

Annexe M : Exemples de techniques de division

Annexe N : Eléments de progression sur la division au cycle 3 (3 pages)

Annexe O : Extraits de manuels scolaires de mathématiques de CM1 (8 pages) :

- *Math CM1 Livre Outil* (1990), pages 74 à 77, Editions Magnard.
- *Math CM1, Calcul et Géométrie* (1989), Chapuis, pages 82 à 85, Editions Nathan.
- *Objectif Calcul CM1* (1987), Clavier et al., pages 99 à 101, Editions Hatier.
- *Math et Calcul CM1* (1987), R.Eiller, pages 94 à 97 , Editions Hachette.

Annexe P : Protocole d'une séance sur la division (3 pages)

Référence : *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*, CM, tome 1, page 66 à 70, Editions Hatier, Paris.

Annexe Q : Synthèse d'une étude sur des écrits sur la formation mathématique (premier degré)

Annexes du chapitre 3 de la partie II

Annexe R : Programme LOGO d'une fractale

Annexes S : Formulaire sur aires et volumes (2 pages)

Annexe T : Fiche d'exercices sur la mesure des aires

Annexe U : Extraits de manuels de CM1 (3 pages)

- *Math Outil* CM1, 1990, Ed Magnard, pages 176 à 179
- *Objectif Calcul* CM1, 1987, Ed Hatier, pages 190 à 193
- *Math et Calcul* CM1, 1987, Ed Hachette, pages 164 à 167

Annexe V : Questionnaire bilan sur la mesure (2 pages)

Exemple d'une séquence d'activités de calcul mental

Ces séances ont lieu en début de cours, pendant un temps variant de 15 à 45 minutes et permettent de rappeler des propriétés d'arithmétique, éventuellement de les démontrer et de donner, par l'exemple, des idées d'activité de calcul réfléchi.

Le principe de ces séances (d'abord une participation des étudiants comme élèves, puis une réflexion plus théorique sur les propriétés constatées et le déroulement de la séance) et l'intention de ces activités (compléter les connaissances des étudiants sur l'arithmétique et leur donner des idées d'activités de calcul réfléchi) leur sont annoncés tout au début de la séquence.

Nous donnons à titre exemplaire le plan d'une séquence, réalisée en plusieurs courtes séances (entre deux ou trois), visant à renforcer les connaissances sur les multiples de 3.

Plan d'une séquence

Consigne 1

"A tour de rôle, dans l'ordre dans lequel vous êtes assis, poursuivez la série que j'amorce : 0 3 6 9 12..."

Les étudiants poursuivent, le plus vite possible, d'abord dans l'ordre croissant puis dans l'ordre décroissant.

On s'interroge sur la liste de nombres parcourue : liste des multiples de 3, liste obtenue à partir de 0 ou de n'importe quel multiple de 3 en ajoutant 3 au nombre précédent.

Consigne 2

"Comment reconnaître qu'un nombre fait partie de cette liste ?"

Quelques exemples pour s'exercer : 342 226 476 etc.

Cette question nous permet, par l'explicitation des méthodes possibles de citer les propriétés suivantes : la somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3, de même le produit de deux multiples de 3.

Démonstration par l'utilisation des écritures $3 \times n$ pour un multiple de 3 (n entier quelconque).

Constat que les non multiples de 3 s'écrivent $3 \times n + 1$ *ou* $3 \times n + 2$.

Consigne 3

"Classez les premiers nombres entiers selon qu'ils s'écrivent :

$3 \times n$ ou $3 \times n + 1$ *ou* $3 \times n + 2$ "

On constate que les nombres se répartissent dans l'ordre en trois colonnes d'entête 0 1 2 de la façon suivante

0	1	2	
3	4	5	
6	7	8	
9	10	11	
12	13	14	etc.

"Comment prévoir dans quelle colonne sont les nombres suivants ?

256 100 200 300 432 etc."

Vers les constats suivants (pas nécessairement tous cités) :

- dans une même colonne, d'une ligne à une autre, il y a un écart d'un multiple de 3,
- un nombre est dans la même colonne que la somme de ses chiffres (ce critère est en général peu connu, l'objectif est de le justifier),
- la somme de deux nombres de la colonne 0 est dans la colonne 0,
- la somme de deux nombres de la colonne 1 est dans la colonne 2,
- la somme de deux nombres de la colonne 2 est dans la colonne 1,
- etc.

Consigne 4

"Si vous savez dans quelles colonnes sont deux nombres n et m, dans quelle colonne est le nombre somme n + m ; et le nombre produit n x m ?"

Les étudiants essaient en général un certain nombre de valeurs numériques qui leur font émettre les bonnes hypothèses (qu'ils considèrent déjà comme une certitude, ce qui nous permet de parler de divers aspects de la preuve).

Démonstration algébrique du fait que la somme de deux nombres est dans la même colonne que la somme des deux entêtes des colonnes où se trouvaient les nombres de départ. Même chose pour le produit.

Introduction du terme de congruence modulo 3. Présentation de cette relation comme une relation d'équivalence, donc produisant une partition de l'ensemble de référence, les nombres entiers. Liaison avec les classements de l'école maternelle.

Identification des entêtes des colonnes avec les restes des nombres de la colonne dans la division par 3.

Consigne 5 : Application à quelques sommes et produits
Par exemple : "152 + 489 x 86 + 95 est dans quelle colonne ?"
Autre exemple : 240 563

Consigne 6
"Nous allons rechercher un moyen systématique de trouver très vite la bonne colonne pour n'importe quel nombre. Certains constats vont nous y aider.
240 563 peut se décomposer selon une décomposition dite canonique (parce qu'elle correspond à la décomposition selon les puissances de la base dix) ainsi
$240\ 563 = 2 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 3$
Trouvez les colonnes des puissances de 10."

Les étudiants constatent que les puissances de dix sont dans la colonne 1.
Le démontrer est prétexte à une démonstration par récurrence.

Montrons que si nous supposons que 10^n est dans la colonne 1, alors 10^{n+1} est aussi dans la colonne 1. 10^{n+1} est dans la même colonne (ou congru à) que 10^n x 10, donc dans la même colonne que 10^n d'après la propriété sur le produit et le fait que 10 soit dans la colonne 1. Comme 10 est dans la colonne 1 , alors de même 10^2, 10^3 et toutes les puissances de 10.

Ainsi 240 563 est dans a même colonne que $2 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 1 + 3$, donc que la somme de ses chiffres.
Tout nombre entier a une telle décomposition canonique, donc tout nombre entier est congru modulo 3 à la somme de ses chiffres.

D'où la propriété suivante qui conclut l'étude :

un nombre est congru (a même reste dans la division par 3) que la somme de ses chiffres

et le critère de divisibilité par 3, qui en est une conséquence :

un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3

Ces deux résultats sont présentés comme une institutionnalisation (familiarisation avec un mot didactique) liée à l'étude faite précédemment.

Poursuite de cette séquence
D'autres séquences de ce type ont lieu sur les multiples de 2, de 5, de 6, de 4, de 9, de 7 (et le constat qu'il n'existe pas toujours de critère de divisibilité "simple"), de 11.
Ces travaux sont utiles simultanément
* au niveau mathématique :
  - pour revoir (ou voir) des propriétés d'arithmétique ;
  - pour préparer les étudiants à la division euclidienne dans N (notions de reste, de multiple le plus proche d'un nombre, d'encadrement par deux multiples consécutifs,...), tout en fournissant des idées d'activités de calcul réfléchi préparant à la division à l'école ;
  - pour examiner la notion de "preuve par " des opérations : la preuve ne donne pas la certitude de l'exactitude, mais décèle de façon sûre certaines erreurs : le choix du nombre de la preuve (culturellement 9) vient de la facilité avec laquelle on peut calculer les restes dans la division par 9, et du fait que ce reste est fonction de tous les chiffres du nombre ; elle est ainsi préférable à la preuve par 5 (qui ne teste que le dernier chiffre) ou par 4 (qui ne teste que les deux derniers chiffres) ;
* au niveau didactique :
  - pour discuter de la notion d'argumentation, de preuve ;
  - pour constater la construction de propriétés : émission d'hypothèses sur des régularités, validation par une preuve universelle (par exemple algébrique) ou invalidation par un contre-exemple.

Des exercices, contextualisés ou non, de recherche de divisibilité de nombres, d'élaboration de nombres répondant à certaines contraintes de divisibilité complètent cette étude, qui se poursuit par l'étude des multiples et diviseurs communs, nombres premiers, et du théorème fondamental de l'arithmétique, avec certaines de ses applications (recherche exhaustive de tous les diviseurs d'un nombre, etc.).

Classement, rangement

L'intention de cette séance (en général trois heures) est de préciser les termes de classement, rangement, d'ensemble, d'ensemble-produit, de relation entre deux ensembles. Elle permet de relier les notions de fonction, application, bijection à des relations particulières.

1 - Activité pour les étudiants

Pour permettre une discussion simultanée sur les démarches à l'école maternelle, l'activité étudiants prend appui sur deux jeux multi-familles fabriqués dans la classe de grande section de maternelle de Madame Bidon, maître-formateur à l'école Jean Jaurès de Petit-Quevilly, près de Rouen, avec laquelle j'ai travaillé plusieurs années (voir pour plus de détails la brochure[214]).

Ces jeux sont de deux sortes (cf. pages suivantes) :
- l'un, de 20 cartes, est un jeu à deux critères, le jeu Petit Ballon ; il a été fabriqué après une réflexion collective sur la représentation des différentes façons que l'enfant avait de placer une petite balle de sable en équilibre sur différentes parties de son corps. Les positions ont d'abord été recherchées en salle de jeu, puis ont donné lieu à des dessins libres, puis à une représentation plus stylisée décidée collectivement (cf. annexe). Le jeu contient 20 cartes à 4 couleurs de balles et 5 positions.
- l'autre, de 24 cartes, est un jeu à 3 critères : 3 formes de tapis, 4 couleurs de tapis, 2 moteurs (cf. annexe). La genèse de ce jeu des Tapis des Pompiers est du même type que la précédente, les enfants de grande section se sont déplacés en salle de jeu sur des morceaux de tissu qu'ils ont fait glisser sur le sol, avec seuls leurs mains ou leurs pieds à l'extérieur du tapis. Le maître a appelé cette aide un moteur et la consigne a été de se déplacer tantôt avec le moteur main, tantôt avec le moteur pied. De retour en classe, ces déplacements ont été prétexte à une représentation, qui a donné lieu au jeu de cartes.

Chaque groupe de 2 ou 3 étudiants reçoit un jeu de cartes Jeu Petit Ballon ou Jeu des Tapis de Pompiers incomplet, présenté comme un jeu multi-familles incomplet. Il doit reconstruire les cartes qui manquent et expliquer quels indices et modes d'organisation il a suivi pour répondre à la consigne.

La synthèse permet de dégager :
- pour le jeu à deux critères : une mise en paquet selon un critère, et à l'intérieur d'un paquet un ordre sur les cartes identique à celui du paquet d'à côté ou une disposition en tableau cartésien ;
- pour le jeu à trois critères, on constate une adaptation des organisations précédentes : double ordre à l'intérieur de chaque paquet, disposition en deux tableaux cartésiens ou plus selon le choix des critères principaux ;

Ce travail nous permet de dégager :
- la notion de critère, de propriété commune à un ensemble d'objets, une classe, qui permet une partition de l'ensemble total des objets en classes disjointes ;
- la notion de classe d'équivalence (et de représentation de la classe), représentée par les entêtes des lignes ou colonnes du tableau cartésien de la famille à deux critères ;
- la notion de rangement et d'ordre, implicitement utilisé comme outil organisationnel pour la famille à 3 critères, comme complément du classement ;
- le tableau cartésien comme outil d 'organisation d'un ensemble à deux critères, donc comme représentation adaptée d'un ensemble-produit de deux ensembles.

La recherche d'un "bon ordre" de rangement des cartes dans leur boîte (ordre du fabricant) nous permet de revoir la notion d'ordre sur un ensemble et d'ordre sur les classes.

2- Court exposé rappelant les mots et les définitions de : relation dans un ensemble, relation d'équivalence, relation d'ordre, ordre partiel, ordre total, partition, classes d'équivalence, ..., bref essayant de préciser les notions mathématiques liées au classement et au rangement.

Exercices d'étude de relations et de reconnaissance de leurs propriétés, par exemple les relations :
- "est multiple de " dans l'ensemble des nombres entiers ;
- "est perpendiculaire à" dans l'ensemble des droites du plan ;
- "est parallèle à" dans ce même ensemble ;
- "a même nombre de jours que" dans l'ensemble des mois de l'année....

Court exposé sur l'aspect constitutif de la pensée du classement et du rangement, exemples sur la genèse de certains concepts : le nombre entier, les grandeurs, ...d'où une justification de l'importance de son étude à l'école maternelle, sous la forme rencontrée : outil d'organisation des objets.

---

214 *Du petit ballon au jeu de cible*, M.Bidon, C.Houdement, M.L.Peltier ,pages 35 à 47, 1992, IREM de Rouen.

Insistance sur la nécessité de construire le tableau cartésien avant de l'utiliser pour faire des exercices de remplissage : le tableau cartésien n'est pas un objet mathématique, mais un outil de traitement des données. Il n'existe que s'il est utile et simplificateur.

Prolongements possibles de cette construction de jeux de cartes multi-familles :
jouer effectivement au jeu des familles, ou au jeu de "dominos" : chacun à tour de rôle peut poser une carte à côté de la précédente si elle a au moins un critère commun avec cette précédente (pour plus de détail voir la brochure citée).'

3 - Autre tâche donnée aux étudiants : résoudre le problème suivant [215]:

André, Bernard, Charles et Denis sont quatre amis. Nous avons sur eux les renseignements suivants : 1- André rencontre souvent l'instituteur et Charles ; 2- le médecin soigne Charles et André ; 3- chaque vendredi, le médecin et le pharmacien font une partie de cartes avec Bernard et Charles. Dans la bande, il y a un capitaine au long cours. Quel est le métier de chacun ?

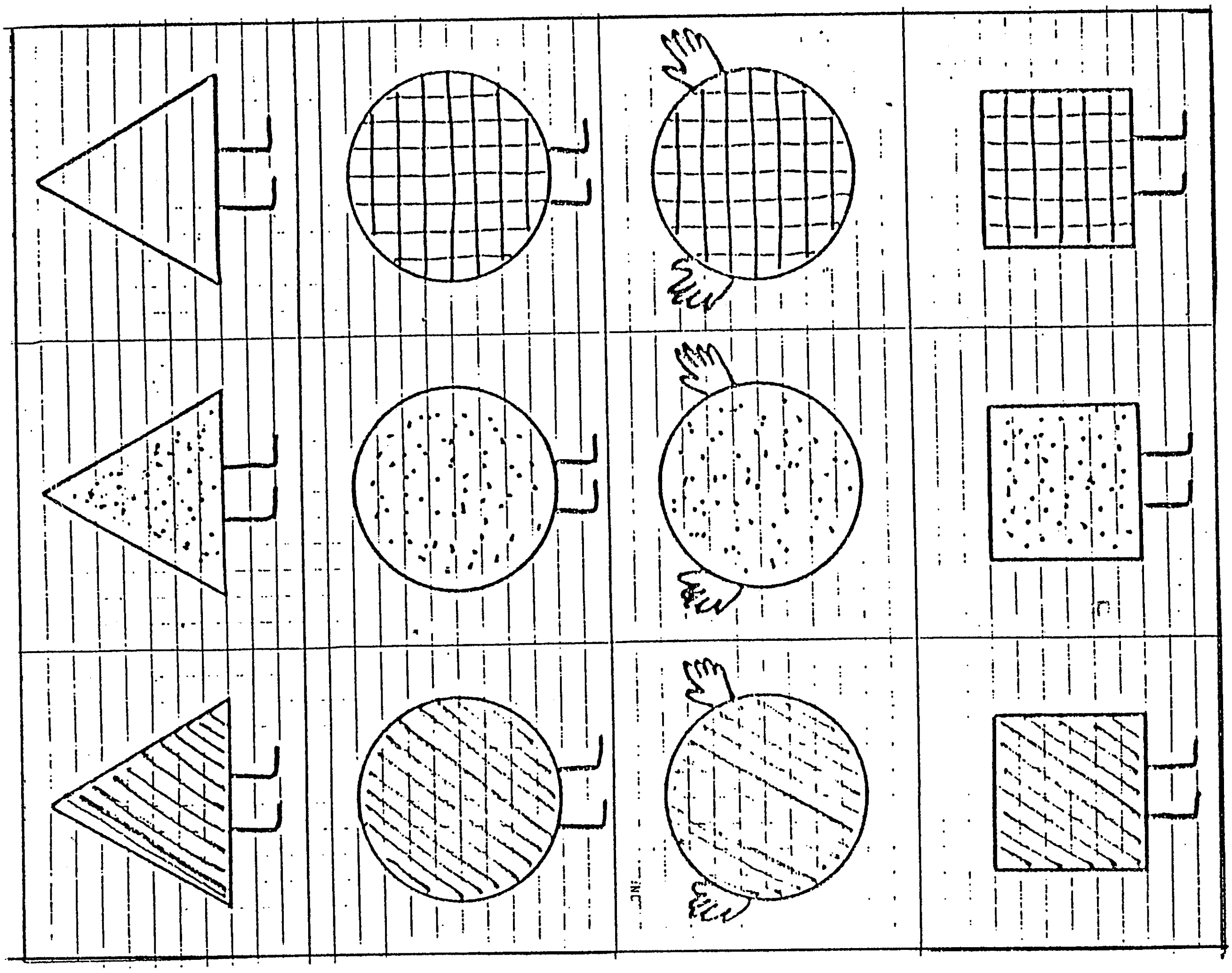
Ce qui nous permet de parler de la notion de relation d'un ensemble vers un autre, d'où un exposé complémentaire sur ce thème, étendu vers les fonctions, applications et bijections.
Le problème nous fournit un exemple de la recherche d'une bijection entre l'ensemble des amis
$\{$ A, B, C, D $\}$ et l'ensemble des métiers. Le tableau cartésien permet d'envisager tous les couples possibles, la relation "n'exerce pas ce métier" permet de trouver la solution.

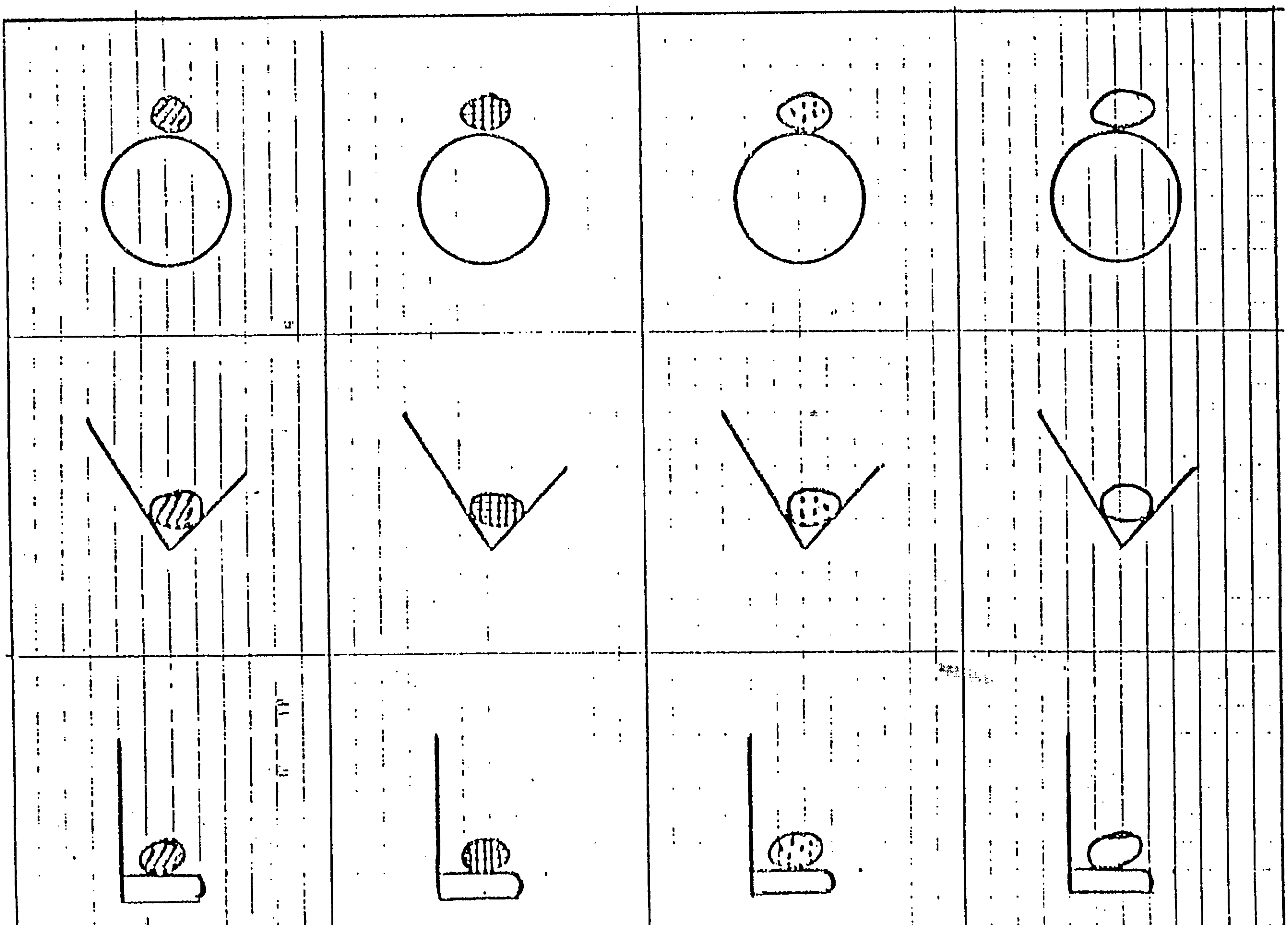
n'est pas ↵	André	Bernard	Charles	Denis
instituteur	x		x	
médecin	x	x	x	
pharmacien		x	x	
capitaine				

Les informations du texte, inscrites dans le tableau, nous permettent de conclure que Denis est médecin, donc André pharmacien, Bernard instituteur et Charles capitaine.

4- Des **exercices mathématiques d'entraînement** (inspirés ou du même type que ceux du recueil d'André Myx [216]) sont donnés aux étudiants à l'issue de ces réflexions en classe.
Des lectures pédagogiques sont conseillées, sur des ouvrages présentant des activités de classement, rangement à l'école maternelle.

---
215 d'après *6 thèmes pour 6 semaines,* André Myx, pages 60 à 138, 1977, Editions CEDIC
216 idem





Titre : ASSEMBLAGES DE TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX

Auteurs : Catherine Houdement (P.E.N. Rouen) et Marie-Lise Peltier (P.E.N. Rouen)

Origine : d'après une idée de C. Véron (P.E.N. Rouen)

Date : mars 1991

Type : Présentation d'activités réalisées dans le cadre de la formation initiale et continue

Résumé : Exploitation de classements de figures géométriques obtenues par un jeu d'assemblage, pour dégager des notions de géométrie ou de mesure telles que polygone, aire, périmètre, symétrie axiale, symétrie centrale.

Mots-clés : Géométrie - polygones - jeu - axe de symétrie - centre de symétrie - logo.

ASSEMBLAGES DE TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

- sans rappel préalable, réactiver les connaissances des normaliens sur polygone, aire, périmètre, convexité, symétrie axiale, symétrie centrale.

- illustrer l'émergence d'une propriété mathématique par le tri entre objets ayant cette propriété et objets ne l'ayant pas.

Objectifs didactiques

- pointer la notion d'enjeu : ici jeu avec un vainqueur.

- montrer une utilisation première du travail de groupe : échange et confrontation en vue de la constitution d'un matériel de travail commun.

- pointer la notion de cadre dans l'exploitation faite des classements : cadre numérique (dénombrement, mesure) et cadre géométrique.

ACTIVITÉ 1

But

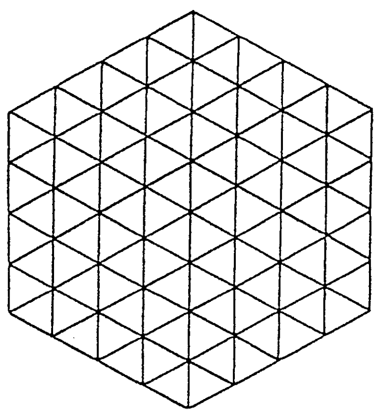
Constitution d'un stock d'assemblages de triangles colorés sur une face

Situation

Jeu à deux.

Matériel

- Grille hexagonale de 96 triangles équilatéraux
- Dés à jouer
- Crayons de couleur
- Ciseaux



* Phase 1

Consigne 1

"Vous disposez, pour deux, d'une grille constituée de cases triangulaires. Vous décidez par un jet de dé le joueur qui va commencer ; puis, alternativement, vous lancez le dé et vous coloriez autant de cases adjacentes que le nombre de points indiqué sur le dé, en essayant de faire le maximum d'assemblages différents.

Des assemblages adjacents obtenus par des jets de dé différents doivent être de couleurs différentes. Si vous ne pouvez pas jouer, vous passez votre tour.

Le gagnant de cette phase est celui qui finit le premier le coloriage de la grille."

Remarques

1 - On peut demander aux joueurs de remplir une feuille de route avec les points tirés par chacun en cochant ceux qui n'ont pas pu être joués, ceci afin de permettre une vérification en fin de partie.

2 - On peut également demander aux joueurs de mettre un signe de reconnaissance sur les assemblages qu'ils ont eux-mêmes coloriés (couleurs attribuées à chacun par exemple).

3 - On observe différentes stratégies chez les normaliens. Certains partent d'un bord, d'autres du centre ; certains collaborent, d'autres jouent de façon dispersée jusqu'au moment où ils constatent que cette stratégie est bloquante pour les deux joueurs.

* Phase 2

Objectif

Distinguer la superposition sans retournement ("mêmes formes") de la superposition après retournement ("formes symétriques")

Consigne 2

"Lorsque la grille est entièrement coloriée, vous découpez les différents assemblages et vous gardez un seul exemplaire de chaque assemblage (deux assemblages qui ne sont superposables qu'après retournement sont considérés comme distincts).

Le groupe gagnant de cette phase est celui qui a obtenu le maximum d'assemblages différents."

Remarque

Dans cette phase, il est important que les assemblages aient été coloriés pour distinguer les superpositions directes des superpositions après retournement.

* Phase 3

Objectifs

- Réinvestir l'analyse précédente : distinction entre mêmes formes et formes symétriques.

- Augmenter le stock de pièces.

Consigne 3

"Par groupes de 4 (puis de 8), vous comparez les formes retenues et vous conservez un seul modèle de chaque sorte."

Remarque

A l'issue de cette phase, on peut comptabiliser le nombre d'assemblages distincts de chaque groupe. On peut également demander à chaque groupe de constituer un deuxième jeu de pièces pour avoir plus de matériel pour la suite.

Il est intéressant de pointer le fait qu'à chaque regroupement le nombre d'assemblages distincts augmente, mais la recherche exhaustive de tous les assemblages possibles n'est pas un but de l'activité.

ACTIVITÉ 2

But

Faire émerger par classement un certain nombre de propriétés des assemblages obtenus.

1 - Déroulement

Matériel

Le jeu de pièces obtenues lors de la consigne 3

Organisation

Par groupes de 4 (ou de 8)

Consigne

"Avec le jeu de pièces que vous avez obtenues précédemment, vous allez proposer divers classements de ces pièces en essayant de préciser le critère qui vous permet de réaliser ce classement.

Dans chaque groupe un secrétaire note les critères retenus et les classements correspondants."

Remarque

Je précise si nécessaire les conditions requises pour qu'il s'agisse d'un classement effectif.

Mise en commun

Chaque groupe vient présenter les classements réalisés

2 - Les divers classements : analyse et exploitation en termes de propriétés mathématiques

a) Le classement par le nombre de triangles constituant l'assemblage permet de pointer la notion d'aire (si on choisit le triangle de base comme unité d'aire, la mesure de l'aire de l'assemblage est le nombre de triangles utilisés)

b) Le classement par le nombre de côtés permet de préciser l'origine du vocabulaire lié aux polygones, de l'associer au classement par le nombre de sommets et de rappeler la propriété pour les polygones : nombre de sommets = nombre de côtés.

c) Le classement par le nombre de côtés de triangles de base dans le contour de l'assemblage permet de pointer la notion de périmètre et notamment de différencier numériquement les notions de périmètre et d'aire. (On constate que deux assemblages peuvent avoir même périmètre sans avoir la même aire, d'où une nouvelle question : peut-on trouver des assemblages ayant même aire et des périmètres différents, des assemblages ayant même aire, même périmètre mais de formes différentes ?)

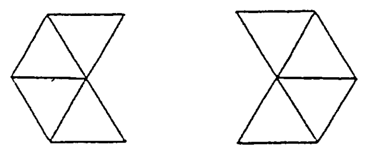
d) L'existence de figures superposables non pas directement mais après retournement est toujours constatée. Deux telles figures seront désignées par la suite par l'expression : "figures jumelles".

Le classement par existence de figures jumelles est donc retravaillé collectivement même s'il n'est pas proposé par les différents groupes.

Consigne : *"Dans chaque groupe vous effectuez le classement : figures ayant leur jumelle, et les autres ; et pour chaque figure n'ayant pas de jumelle dans le stock de vos pièces, vous regardez s'il est possible de construire sa jumelle."*

Constat 1 : Deux figures jumelles se superposent seulement après retournement

Constat 2 : Certaines figures n'admettent pas de jumelle. (Ce n'est pas évident pour tous les normaliens. Par exemple les deux assemblages ci-dessous leur paraissent jumeaux alors qu'ils se superposent, même sans retournement).



Consigne : *"Dégagez les particularités des figures n'admettant pas de figure jumelle".*

Il s'agit ici de dégager la notion d'axe de symétrie : les figures n'ayant pas de jumelle admettent au moins un axe de symétrie.

e) Cette phase peut être prolongée par un classement suivant le nombre d'axes de symétrie.

f) Autres classements, proposés ou imposés :

- figures convexes, figures non convexes
- figures ayant un centre de symétrie, figures n'en ayant pas (par coïncidence avec l'empreinte après demi-tour). Mise en relation avec la parité du nombre d'axes de symétrie
- assemblages réalisant ou non un patron de solide (tri par anticipation, validation éventuelle par construction)

3 - L'institutionnalisation choisie

- Notion d'axe de symétrie, notion d'invariant (figures ayant des axes de symétrie)
- Vers la symétrie axiale : notion de transformation (figures se déduisant l'une de l'autre par symétrie axiale). La notion de symétrie axiale est souvent bien connue des normaliens. J'insiste donc surtout sur la distinction entre la notion d'invariant et celle de transformation.
- Lien avec la symétrie centrale

4 - Mini-analyse didactique

- Notion d'enjeu
- Notion de cadres mathématiques
- Notion de classement permettant l'émergence de propriétés

5 - Travail individuel

- Rédiger une fiche de préparation pour une activité-élèves à partir d'assemblages de figures (carrés, triangles rectangles isocèles ou triangles équilatéraux)
- Construire un jeu de cartes permettant un travail de reconnaissance de formes à partir des assemblages obtenus. (Le jeu est constitué de cartes portant des assemblages jumeaux dans des dispositions variées et d'un assemblage n'ayant pas de jumeau). Proposer diverses règles de jeu (ex. : jeu de mariage, mémory,...)

Assemblages de triangles équilatéraux

ACTIVITÉ 3

Prolongement possible en LOGO

(Situation construite à partir d'un échange avec Mme S. Dupuis, I.E.N. à Neufchâtel - 76)

Objectif

- Etude de triangles réguliers ; propriétés angulaires.
- Comparaison d'unités de mesure de longueur

Reproduction d'assemblages à l'écran

- En mode direct avec les primitives usuelles
- En mode direct avec la primitive ∇
- En mode programme avec deux options :

. le professeur impose le côté du triangle-écran en pas de tortue

. le professeur demande un triangle-écran superposable au triangle du jeu. On pourra ensuite dans ce cas proposer une étude des périmètres des différents assemblages en fonction de l'unité de longueur choisie : côté de triangle équilatéral, cm, pas de tortue, et pointer la proportionnalité entre les différentes mesures obtenues.

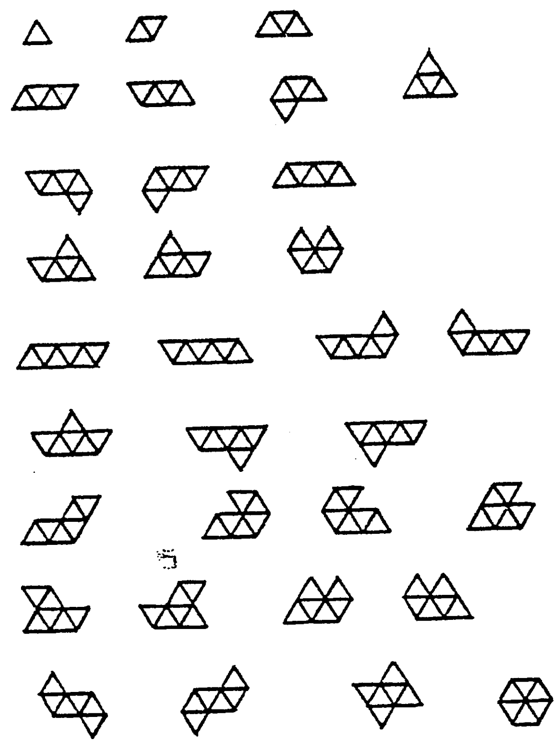
Fabrication d'assemblages

- avec contrainte de périmètre
- avec contrainte d'aire

Travail individuel

Fabrication d'une situation de classe exploitant une démarche analogue.

Recensement des différents assemblages pouvant être obtenus



LE SOLIDE CACHE

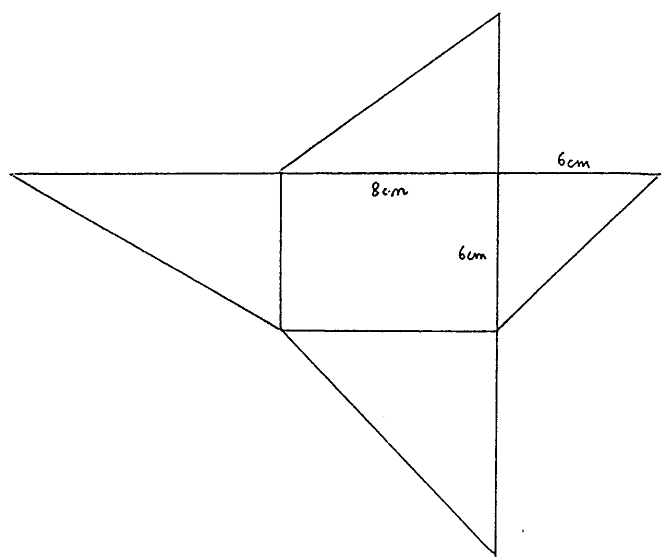
Résumé : à partir d'une activité de jeu du portrait pour construire un solide, il s'agit de pointer les notions de situation didactique, de situation auto-validante et d'analyser le fonctionnement du langage (langue naturelle et langage mathématique) dans une situation de communication.

Origine : activité tirée du livre *Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire CM* (Editions Hatier, 1981).

Temps : une séance de trois heures

Choix du solide
Celui-ci doit être suffisamment complexe pour ne pas être immédiatement identifié, mais suffisamment simple pour pouvoir être construit à partir d'informations orales.
Nous avons choisi une pyramide à base rectangulaire, non droite afin que se pose un problème d'orientation.

Patron du solide choisi
Selon le sens de pliage du patron, on obtient deux pyramides symétriques.



OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

- Représentation mentale d'un solide.
- Passage espace - plan (rôle de l'anticipation).
- Constructions de figures planes à partir d'informations.
- Sensibilisation à la notion d'orientation dans l'espace.
- Spécificité du fonctionnement du langage mathématique.

Objectifs didactiques

- Situation didactique: phases de formulation, d'action, de validation.
- Situation de communication: analyse des différences de fonctionnement de la langue naturelle et du langage mathématique.
- Autovalidation.

Objectifs méthodologiques

- Recherche de questions pertinentes pour construire le patron d'un solide.
- Tri d'informations.
- Raisonnement, déduction.

ACTIVITE

Phase 1 : construction effective

Matériel
- Le solide construit en carton, caché dans une boîte
- Des feuilles de papier uni et les instruments usuels de géométrie

Organisation
Travail par groupe de deux ou quatre étudiants avec réalisation individuelle

Consigne

"Deux parmi vous, appelés "émetteurs", vont sortir pour observer le solide qui est caché dans la boîte; ils noteront toutes les informations qu'ils jugeront utiles pour la construction du solide et pour répondre aux questions que leur poseront leurs camarades.

Tous les autres devront construire un solide en tout point identique à celui qui est caché dans la boîte. Pour cela, par groupe de 4 (ou de 2) et à tour de rôle, ils poseront aux émetteurs, de retour dans la classe, les questions qui leur paraissent utiles pour réaliser la construction.

Les émetteurs ne pourront répondre aux questions que par oui ou par non (sauf pour les mesures de longueurs); ils ne verront plus le solide. Les questions et réponses seront notées au tableau et numérotées par le professeur.

Chacun pourra commencer la construction quand il le souhaitera et notera le moment correspondant (par le numéro de la dernière question qui lui est utile)."

Remarques

Le travail par **groupes avec réalisation individuelle** permet aux étudiants de discuter sur les questions à poser, sur la façon de les formuler, sur les déductions qui peuvent être faites à partir des réponses déjà obtenues. La réalisation individuelle du patron du solide semble nécessaire afin que chaque étudiant puisse s'approprier les réponses fournies et se confronter au problème d'organisation de ces informations pour construire effectivement le solide.
Cette situation contient un **réel enjeu** pour les étudiants: réussir à construire le solide

Les tâches des émetteurs

- Observation fine du solide
- Prise d'informations pertinentes (sur la forme des faces, l'organisation des faces, la mesure des longueurs, des angles)
- Hypothèses sur les questions que poseront les autres

Les tâches des autres

- Chercher et formuler de "bonnes questions"
- Prendre en compte les réponses déjà données, les articuler, effectuer d'éventuelles déductions
- Emettre des hypothèses, tenter de les valider en posant des questions appropriées
- Construire des figures planes à partir d'informations
- Anticiper le "montage" et organiser les différentes faces par raisonnement ou par tatônnement.

Gestion du temps

Pour les émetteurs pendant que les autres construisent effectivement le solide et pour les plus rapides (ceux qui ont fini la construction), **consignes possibles:**

-- *"Construisez:*
- *un patron en un seul morceau,*
- *plusieurs patrons différents,*
- *un patron en utilisant seulement la règle et le compas et étudiez sur ces patrons, avant montage, l'adjacence des faces."*

-- *"Donnez une suite d'informations numériques minimum permettant de construire le polyèdre."*

Validation

- Dans un premier temps, la validation est individuelle: en effet, lorsque le solide "se ferme", l'étudiant a généralement la certitude qu'il a construit le "bon" solide.
- Lorsque tous les étudiants ont terminé la construction de leur propre solide, les émetteurs sortent le solide caché et le font circuler pour contrôler les diverses réalisations: on constate alors qu'il existe deux solides différents répondant aux questions, ce qui permet de pointer la notion d'orientation dans l'espace.

Phase 2 : étude des questions

Matériel
La liste des questions et leurs réponses numérotées au tableau

Le fait d'avoir écrit les différentes questions et leurs réponses permet de travailler sur les **éléments de la communication** et d'en étudier certains fonctionnements ou dysfonctionnements.

On s'intéressera :

- à la **nature du vocabulaire utilisé et à sa précision** (ou son imprécision);
- à l'**organisation générale du questionnement:** essai d'analyse globale ou locale, prise en compte des réponses antérieures, existence de questions redondantes, articulation des questions entre elles;
- aux hésitations des émetteurs sur les réponses à certaines questions qui s'expliquent souvent soit par l'imprécision du vocabulaire, soit par les **différences entre le langage mathématique et la langue naturelle** (principe d'exhaustivite de la langue naturelle dit encore **principe du "maximum d'informations"**).

On pourra prévoir un travail spécifique sur ce questionnement, par exemple la **recherche d'un questionnement minimum...**

Phase 3 : institutionnalisation mathématique

Pour cette activité, elle peut se résumer ainsi:

- un polyèdre a des arêtes, des faces et des sommets;
- une arête "s'éclate" en au maximum deux segments sur le patron;
- un sommet est commun à au moins deux arêtes, donc au moins trois faces;
- un solide a au moins quatre faces;
- il existe plusieurs patrons d'un solide;
- une seule donnée numérique suffit pour construire un triangle rectangle isocèle fixé;
- deux données numériques suffisent pour construire un triangle rectangle fixé.

Cette synthèse permet de revoir et de compléter les connaissances de géométrie plane et spatiale des étudiants.

ANALYSE DE L'ACTIVITE

Point mathématique et méthodologique

Il s'agit là de déterminer quelles notions mathématiques ont été travaillés dans cette activité:
- construction mentale d'un solide (image mentale),
- construction effective de figures planes,
- passage de l'espace au plan,
- gestion et tri d'informations,
- vers un questionnement de type expert.

Analyse didactique

L'objectif de cette analyse est de pointer des aspects didactiques qui nous semblent importants dans toute activité mathématique.

1 - C'est un exemple d'une activité de **communication** (une telle activité est particulièrement adaptée pour travailler sur le vocabulaire, le justifier) et d'**action** (par construction de l'objet). Elle comporte trois aspects de la géométrie à l'école: **décrire, construire, représenter.**

2 - Le **rôle** du maître dans la première phase est d'animateur, il n'est pas une référence du savoir. L'échange se fait entre pairs, la validation est donnée par la comparaison avec l'objet de référence. Dans la deuxième phase, le maître organise l'analyse des discussions. Dans la phase 3, il complète les connaissances des élèves et institutionnalise les savoirs.

3 - L'**enjeu** de l'activité est contenu dans l'aspect ludique et la production d'un objet, qui doit être identique à l'objet caché.

4 - L'**autonomie de l'étudiant** est relativement forte:

- il peut rectifier ses hypothèses au cours de la recherche (par exemple si le solide qu'il a construit ne se ferme pas);

- il peut choisir son mode de construction; on constate d'ailleurs souvent que certains étudiants essaient d'abord de construire un patron en un seul morceau, puis se résolvent, devant la difficulté de la prévision, à découper et à assembler les faces une par une: ils comprennent mieux la difficulté des élèves de l'école élémentaire d'appréhender globalement le patron d'un solide.

- il décide lu-même de sa réussite ou de son échec en comparant son solide avec le solide caché.

5 - La notion d'**analyse a priori** est bien illustrée ici dans la recherche des émetteurs sur les caractéristiques du solide et les hypothèses qu'ils font sur les questions de leurs camarades. Il est d'ailleurs intéressant de relever les hésitations de ceux-ci face aux questions non prévues et de pointer ici la difficulté des décisions "sur le vif".

6 - La **gestion du temps**: cette activité fournit un bon exemple de la nécessité de prévoir d'autres exercices pour ceux ayant terminé plus tôt.

POURSUITE DE L'ACTIVITE

Aspect didactique

Etude d'un document pédagogique
Réf ERMEL *Apprentissages mathématiques à l'Ecole Elementaire* CM, Editions Hatier, 1981, pages 57 à 70.

Voici un exemple de questionnement individuel, à préparer hors classe et donnant lieu à une synthèse en classe:

1 - Quels objectifs de contenus, de méthodes a le maître proposant cette séquence?

2 - Quels aspects d'une situation didactique rencontre-t-on dans cette séquence?

3 - Quels choix fait le maître lors de sa préparation?

4 - En quoi consiste l'activité des élèves?

5 - Quels savoirs ou savoir-faire mentionnés dans les Instructions Officielles de l'Ecole Elémentaire et de 6ème, 5ème sont travaillés dans cette séquence?

Le but de cette phase est de permettre aux étudiants de réinvestir à la fois la situation vécue en phase 1 et l'analyse qui en est faite à la phase 2, et de les préparer à l'analyse d'une situation de classe.

Aspect mathématique

Cette situation est prétexte à des **compléments sur les divers solides** (dont les solides de Platon), les **représentations planes des solides** (dont les patrons, avec notamment l'étude des relations d'adjacence) et d'autres compléments sur la **géométrie dans l'espace.**

Aux formateurs de mathématiques des I.U.F.M. chargés de la formation des futurs professeurs d'école.
SVP, pourriez-vous répondre à ces quelques questions pour me permettre d'avancer dans des travaux de recherche?

Merci beaucoup. Aussois, mai 1993, Catherine Houdement.

Hypothèse de travail: vous devez dispenser une formation initiale d'une soixantaine d'heures du module obligatoire de formation initiale de futurs professeurs d'école en mathématiques; le programme du concours est déterminé en fonction de votre programme de cours.

1 - Quels sont les thèmes mathématiques dans la liste suivante que vous choisissez de traiter en priorité si vous avez 60 heures de formation à dispenser?

A Nombre entier	**F** Rationnels et décimaux	**J** Géométrie plane des figures
B Addition	**G** Opérations sur décimaux	**K** Géométrie plane des transformations
C Soustraction	**H** Fonctions numériques	**L** Géométrie des solides
D Multiplication	**I** Mathématiques et maternelle	**M** Mesure
E Division		

2 - Votre choix serait-il différent pour une première année de formation non sanctionnée par un concours? Pourquoi?

3 - Avez-vous un ordre de présentation privilégié? Si oui lequel, pourquoi? Si l'ordre vous est indifférent, précisez-le, merci.

4 - Quels critères retenez-vous pour juger de l'effet de votre formation?

5 - Quels thèmes de la liste acceptez-vous de ne pas traiter dans une formation initiale (suite aux contraintes de temps...)? Pourquoi?

A me rendre pour le 19 mai au plus tard S.V.P. Merci beaucoup.
Vous pouvez formuler toute remarque ou développement complémentaire au dos de cette feuille.

Titre : Pavage et PGCD

Auteurs : Marie-Lise PELTIER et Catherine HOUDEMENT (Pr. I.U.F.M. Rouen)

Type : Activités en formation initiale ou continue

Résumé : à partir d'une situation problème de pavage de rectangles, dégager les notions de PGCD, de partie aliquote commune, d'irrationalité, puis pointer quelques concepts de didactique : aspects outil-objet d'une notion, variable didactique, seuil épistémologique.

Origine : problème tiré de *Problème ouvert et Situation Problème* (IREM de Lyon No 64, 1988).

Durée prévue : deux séances de trois heures.

En annexe : développements mathématiques.

PAVAGE ET PGCD

I - OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

Il s'agit de proposer aux étudiants une situation durant laquelle ils vont "faire des mathématiques" : résoudre un problème, d'apparence géométrique, en utilisant un outil mathématique numérique, le PGCD, et prétexte à une réflexion plus poussée sur la "nature" des nombres-mesures (rationalité et irrationalité, incommensurabilité de deux réels).

Objectifs didactiques

A l'occasion certaines notions de didactique peuvent être pointées dans cette activité (notions d'outil et d'objet, variable didactique, contextualisation,...), mais elle reste à visée essentiellement mathématique.

II - ACTIVITÉ

Problème général présenté aux étudiants

"Il s'agit de paver un rectangle de dimensions données avec des carrés tous exactement superposables, les plus grands possible. Nous appelons "paver" le fait de placer les carrés bord à bord, sans chevauchement, sans trous, sans débordement. On pourrait encore dire qu'il s'agit de réaliser un "carrelage" du rectangle."

Phase 1 :

rectangles de dimensions entières.

Objectif

Faire émerger la notion de PGCD en tant qu'outil de résolution du problème.

Consigne 1

"Vous devez carreler un rectangle de dimensions 42 cm sur 96 cm."

Les diverses propositions sont recensées. Si l'échec est total, la nouvelle consigne est de carreler un rectangle de 8 cm sur 12 cm, afin de permettre un dessin effectif du rectangle et de ses carrelages.

Remarques

Les étudiants proposent généralement, dans un premier temps des carrés de 2 cm sur 2 cm, et progressivement essaient d'autres valeurs.

Certains étudiants ne sont pas convaincus que des carrés de 6 cm sur 6 cm sont les plus grands possible répondant à la question, ils essaient des valeurs décimales non entières supérieures à 6.

Consigne 2 :

reprise de la consigne 1 avec divers rectangles :

- 462 cm sur 165 cm
  pour qu'il soit impossible de faire le dessin.

- 1620 cm sur 1650 cm
  pour mettre en évidence une propriété du PGCD.

- 105 cm sur 176 cm
  pour dégager la notion de nombres premiers entre eux.

- 67320 cm sur 245700 cm
  pour faire évoluer les procédures de recherche et se libérer des unités.

Synthèse

1 - Quelles procédures ont été utilisées pour résoudre le problème ?

- Le tâtonnement et la recherche de diviseurs successifs.
- L'utilisation des dessins.
- La décomposition des nombres en facteurs premiers, soit par décompositions multiplicatives successives, soit avec l'algorithme traditionnel.

2 - Quelle propriété vérifie le côté du carré répondant à la question ?

- C'est un diviseur des deux nombres, pour que l'on puisse "paver"
- C'est le plus grand diviseur des deux nombres, pour que ce soit le carré le plus grand possible.

La notion mathématique ainsi dégagée est celle de **plus grand diviseur commun** à deux nombres.

3 - Quelles propriétés ou définitions ont déjà été rencontrées ?

- PGCD (ka, kb) = k PGCD (a, b)
- Si PGCD (a, b) = 1 , a et b sont dits premiers **entre eux** (on dit aussi étrangers).

Institutionnalisation sur les points suivants

- Définition du PGCD de deux nombres entiers.
- Définition de la notion de nombres entiers **premiers entre eux ("étrangers")**
- Recensement des méthodes de recherche du PGCD de 2 nombres entiers :

  • **1ère méthode**, utilisant la structure factorielle de N : décomposition en facteurs premiers des deux nombres.

  • **2ème méthode**, utilisant la structure euclidienne de N : algorithme d'Euclide.
  – Présentation géométrique de la méthode des soustractions successives (utilisant la propriété si d/a et d/b alors d/a-b) : antéphérèse (cf. annexe 1).
  – Algorithme d'Euclide sous sa forme usuelle. Traitement informatique de cet algorithme.
  – Lien avec les fractions continues.

Phase 2 :

rectangles de dimensions non entières.

On étend maintenant le problème de l'existence d'un carré le plus grand possible permettant de paver un rectangle de dimensions quelconques.

Objectifs

- Faire émerger la notion de "partie aliquote commune" à deux rationnels.
- Poser le problème de irrationalité de certains nombres.

Consignes successives

- *Paver un rectangle de 72,45 sur 61,2.*
- *Paver un rectangle de 21 15 sur 49 14*
- *Paver un rectangle de 25 3 sur 40 11.*

Recensement des résultats et des procédures utilisées.

- 72,45 et 61,2 sont remplacés par 7245/100 et 6120/100 : des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties.

- 21/15 et 49/14 remplacés par 7/5 et 7/2 : or 1/5 = (1/10) x 2 et 1/2 = (1/10) x 5 : donc 7/10 convient.

- 25/3 et 40/11 sont remplacés par 275/33 et 120/33 : des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties (soit décomposition en facteurs premiers, soit algorithme d'Euclide).

Synthèse

1 Les décimaux sont "naturellement" transformés en fractions décimales pour travailler à nouveau sur les entiers : D^+ se trouve naturellement plongé dans Q^+.

2 L'extension à $Q^+ - D^+$ se fait "en douceur", le dénominateur commun retrouve son sens et la "commune mesure" sa définition.

3 Le côté du carré solution est un nombre ayant des propriétés comparables à celles du PGCD lorsque les dimensions étaient entières, c'est la commune mesure aux deux dimensions du rectangle ou encore la partie aliquote commune aux deux nombres qui les mesurent.

Nouvelle consigne

"Est-il toujours possible de paver un rectangle avec des carrés?"

Généralement la réponse des étudiants est oui. Ceci va permettre d'introduire la notion d'incommensurabilité de certaines grandeurs et de comprendre qu'il n'est par exemple pas possible de paver un rectangle de dimension 1 et $\sqrt{2}$ avec des carrés.

Ici il est possible de donner un aperçu historique et philosophique de ce problème car la méthode décrite dans le livre X des Elements d'Euclide est analogue à celle de la recherche du PGCD par soustractions successives : "étant données deux grandeurs inégales et la plus petite retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, les deux grandeurs sont incommensurables".

On peut également proposer une démonstration géométrique de l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$ s'appuyant sur cette propriété et prolonger cette méthode au développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ (cf. annexe 2).

Remarque

Le problème de l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$ revient à celui de irrationalité de $\sqrt{2}$, mais il est à rappeler que deux nombres irrationnels peuvent mesurer des grandeurs commensurables par exemple $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ puisque leur rapport est 3.

Exemples d'autres rectangles "classiques" que l'on ne peut théoriquement pas paver avec des carrés :

- les "rectangles d'or"
- les rectangles correspondant aux formats standard des feuilles de papier (A_4, A_3, A_2...).

Il est intéressant de noter la différence entre le problème théorique et la manipulation pratique, car il est évidemment possible matériellement de paver la feuille A_4 avec des carrés puisqu'il s'agit alors de travailler sur des valeurs approchées décimales qui sont donc toujours "commensurables".

Institutionnalisation

Pour traiter le problème du pavage par des carrés d'un rectangle de dimensions décimales ou rationnelles, la méthode est identique à celle utilisée pour les entiers.

La notion dégagée est alors celle de "partie aliquote commune" à deux rationnels (ou deux décimaux).

Le problème n'a pas de solution si les deux dimensions sont incommensurables, c'est à dire si les deux nombres qui les mesurent ont un rapport irrationnel.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ

1 - Analyse mathématique

- Notion de PGCD, avec approche de diverses méthodes pour le trouver. Vision "géométrique" du PGCD.
- Réinvestissement de connaissances numériques telles que critères de divisibilité....
- Différenciation de N, D, Q, R "en acte".
- Modélisation du problème en accord avec la réalité pour N, D et Q, en désaccord avec la réalité pour R. Limites de l'approximation.

2 - Analyse didactique

Diverses notions didactiques peuvent être pointées dans cette séquence.

- L'aspect outil d'une notion

(dans la construction des connaissances par dialectique outil-objet).

Le **PGCD** de deux nombres est introduit ici en tant qu'outil de résolution du problème et non présenté en tant qu'objet de savoir par une définition. Ceci permet de donner du sens à la notion de PGCD.

A l'issue de la phase d'institutionnalisation, le PGCD a acquis un statut d'objet mathématique ayant sa place dans "l'édifice" des connaissances mathématiques.

- Variable didactique

- dans la phase 1, le choix des dimensions des différents rectangles pour faire évoluer les procédures de calcul du côté du carré est un exemple de variable didactique.
- dans la phase 2, les dimensions du rectangle imposent des méthodes de démonstration de niveaux fort différents ; à ce titre ce sont des variables didactiques.

- La notion de preuve :

cette situation permet de montrer les limites de la preuve pragmatique et la nécessité de preuves intellectuelles.

- La "contextualisation" d'une notion

(ici celle de PGCD dans la phase 1) : cette contextualisation est à la charge du maître, c'est sa pertinence qui assurera la prise de sens de la notion par les élèves.

ANNEXE 1

Seconde méthode (utilisation de la structure euclidienne)

convention d'écriture : p/n *signifie ici :* p est un diviseur de n

Propriété utilisée :

Si d/a et d/b alors d/(a-b) -
car a = nd, b = md, et donc a - b = (n - m)d.

Cette méthode est présentée dans les éléments d'Euclide (300 av. J.C.) au livre VII mais semble être connue depuis l'époque pythagoricienne (540 av. J.C.)

Position du problème avec le rectangle 96 x 42 :

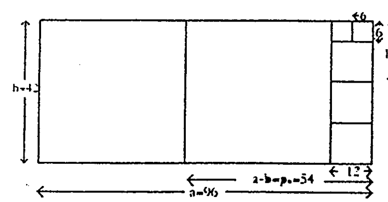
Pour a > b, si on peut paver le rectangle a sur b, on peut paver le carré b sur b et donc aussi le rectangle b sur a - b, et ainsi de suite...

Soustractions successives

Si d/96 et d/42 alors d/(96 - 42) soit d/54
Si d/54 et d/42 alors d/(54 - 42) soit d/12
Si d/42 et d/12 alors d/(42 - 12) soit d/30
Si d/30 et d/12 alors d/(30 - 12) soit d/18
Si d/18 et d/12 alors d/(18 - 12) soit d/6
Si d/12 et d/6 alors d/(12 - 6) alors d = 6.

Ce procédé porte le nom d'antéphérèse.
Pourquoi ce procédé a-t-il une fin ?

Toutes les différences obtenues sont nécessairement inférieures à 96 et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers entre 0 et 96 donc au bout d'au plus 96 soustractions, 2 restes seront égaux.



On peut "améliorer" ce procédé en effectuant la division euclidienne de 96 par 42 :

96 = 2 x 42 + 12 ; d/96 et d/42 donc d/12
42 = 3 x 12 + 6 : d/42 et d/12 donc d/6
12 = 2 x 6 : donc d = 6

C'est l'algorithme d'Euclide que l'on peut définir par :

pgcd (a, 0) = a
pgcd (a, b) = pgcd (b, a-bq)
et pgcd (a, b) = r_n, dernier reste non nul.

C'est une méthode récursive facile à traiter en informatique :

ordonner a et b
si b = 0
alors pgcd (a, b) = a
sinon pgcd (a, b) = pgcd (b, a mod b)

(Le procédé a une fin car la suite des restes est une suite d'entiers positifs strictement décroissante)

Lien avec les fractions

$$\frac{96}{42} = 2 + \frac{12}{42} = 2 + \frac{1}{\frac{42}{12}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{6}{12}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$$

Cette décomposition est due à l'Hindou Aṛyâbhata (500 ap. JC)

ANNEXE 2

Dans le livre X, Euclide utilise pour démontrer l'incommensurabilité de 2 grandeurs une méthode analogue à celle de la recherche du pgcd par soustractions successives :

"Etant donné 2 grandeurs inégales et la plus petite retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, les 2 grandeurs sont incommensurables".

On s'arrête dès que l'on trouve deux restes successifs p_n et p_{n+1} qui se trouvent dans le même rapport que les grandeurs initiales a et b :

$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$; les 2 grandeurs sont alors incommensurables.

Démonstration

Supposons qu'il existe n tel que $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{a}{b}$

(a et b non nuls)

alors, en continuant les soustractions successives on obtiendra 2 nouveaux restes p_m et p_{m+1} tels que $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{p_m}{p_{m+1}}$

En effet, $\frac{a}{b} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$ donc $\frac{a}{p_n} = \frac{b}{p_{n+1}} = \frac{1}{k}$

D'où $p_n = ka$, $p_{n+1} = kb$

et $p_{n+2} = p_n - p_{n+1} = ka - kb = k(a-b) = kp_0$

et $p_{n+l} = kp_{l-2}$ pour $l \geq 2$

La suite de nombres suivante est "pseudo-périodique" :

b , p_0, p_1, ... p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_{n+2}....p_{2n+1}, p_{2n+2},...

b . p_0, p_1, ... p_{n-1}, ka, kb, kp_0, kp_n, kp_{n+1},

b , p_0, p_1, ... p_{n-1}, ka, kb, kp_0, k^2a, k^2b,...

($p_{n+r} = kp_{r-2}$)

d'où $\frac{p_{2n+2}}{p_{2n+3}} = \frac{kp_n}{kp_{n+1}} = \frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{a}{b}$

et d'une façon générale

$\frac{p_{n+a(n+2)}}{p_{n+a(n+2)+1}} = \frac{a}{b}$

Montrons qu'alors on ne pourra jamais trouver deux restes successifs égaux.

Soit n le plus petit entier tel que $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{a}{b}$

Supposons qu'il existe s tel que $\frac{p_s}{p_{s+1}} = 1$

Alors nécessairement s > n+1. On divise s-n par n+2

$q(n + 2) < s - n < (q + 1)(n + 2)$

$s - n = q(n + 2) + r$ avec $r < n - 2$

$p_s = p_{n+r+q(n-2)} = k^q p_{n+r} = k^{q-1} p_{r-2}$

Alors $\frac{p_s}{p_{s+1}} = \frac{k^q p_{n+r}}{k^q p_{n+r+1}} = \frac{p_{n+r}}{p_{n+r+1}} = \frac{p_{r-2}}{p_{r-1}} = 1$

ce qui est contradictoire.

Donc a et b sont incommensurables.

$a = \sqrt{2}$
$b = 1$
$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$

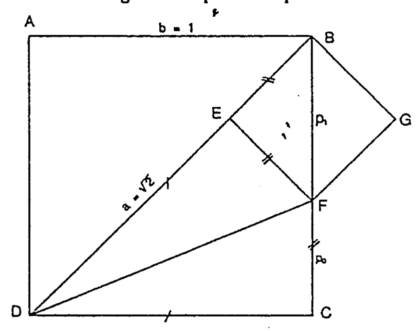
$p_0 = a - b = \sqrt{2} - 1$

$p_1 = b - p_0 = 1 - (\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)$

$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\sqrt{2}.(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$

On en déduit que 1 et $\sqrt{2}$ sont incommensurables.

Démonstration géométrique : antéphérèse



a = BD
b = BC = DE

La perpendiculaire en E à DB coupe BC en F

$p_0 = a - b = BD - BC = BD - DE = BE$
$p_1 = b - p_0 = BC - BE = BC - FC = BF$

Les triangles rectangles EDF et CDF sont isométriques car ils ont l'hypoténuse commune et un côté de même longueur.

Donc EF = FC. Or BEF est rectangle isocèle, donc EB = EF = FC

On construit le carré EFGB, il est semblable à ABCD

On a donc $\frac{p_1}{p_0} = \frac{a}{b}$

Développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ (idée datant de la Chine, de l'Inde, de la Grèce antique).

Théorie précisée par Fermat (1601-1665), Euler . (1700-1783), Lagrange (1700-1783), Legendre (1752-1833)

$a = \sqrt{2}$ $b = 1$ $p_0 = a - b$ $p_1 = b - p_0$ et $\frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_0}$

$a = b + p_0$ $b = p_0 + p_1$ donc $a = 2p_0 + p_1$

$$\frac{a}{b} = \frac{2p_0+p_1}{p_0+p_1} = 1 + \frac{p_0}{p_0+p_1} = 1 + \frac{1}{\frac{p_0+p_1}{p_0}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_1}{p_0}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a}{b}}$$

d'où itération du processus.

On a donc $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

D'où $\boxed{\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + ...}}}}$

Voici plusieurs exemples de techniques de division.

Une technique actuelle des Pays-Bas :
961 093 divisé par 563.

1707
101
1606
961093
- 563000
398093
- 337800
060293
- 56300
03993
- 3378
0615
- 563
52

Une autre des Pays-Bas :
961 093 divisé par 563.

1707
961093
- 563000
398093
- 394100
003993
- 3941
52

Une technique anglo-saxonne :
7 582 139 divisé par 437.

```
          0 0 1 7 3 5 0

    437)  7 5 8 2 1 3 9
        - 4 3 7

          3 2 1 2
        - 3 0 5 9

              1 5 3 1
        -     1 3 1 1

                2 2 0 3
        -       2 1 8 5

                  1 8 9
```

Une russe : 7 582 139 divisé par 437

1	437	7582139 : 437 = 17350
2	874	- 437
3	1311	3212
4	1748	- 3059
5	2185	01531
6	2622	- 01311
7	3059	002203
8	3496	- 002185
9	3933	0000189

Une vieille technique française de 1788 :
12 345 divisé par 52.
(bande dessinée de l'algorithme)

Numéro 1

1 9
~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 5 (2
~~1~~ ~~0~~ ~~4~~ 52

Numéro 2

1 9
~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 5 (23
~~1~~ ~~0~~ ~~4~~ 6 52
1 5

Numéro 3

3
~~1~~ ~~9~~ 8
~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 (23
~~1~~ ~~0~~ ~~4~~ ~~6~~ 52
~~1~~ ~~5~~

Numéro 4

3
~~1~~ ~~9~~ 8
~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 (237
~~1~~ ~~0~~ ~~4~~ ~~6~~ 4 52
~~1~~ ~~5~~ 6
3

Numéro 5

~~3~~ 2
~~1~~ ~~9~~ ~~8~~ 1
~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ (237
~~1~~ ~~0~~ ~~4~~ ~~6~~ ~~4~~ 52
~~1~~ ~~5~~ ~~6~~
~~3~~

EXEMPLE de PROGRESSION GLOBALE sur LA DIVISION DU CE2 au CM2.
A L'ECOLE.

CE2 troisième trimestre.

Calcul mental	Approche de la division dans N
Renforcer le sens de la multiplication: - multiplication par 10^n ; - notion de multiple (par le jeu du furet) ; - place d'un nombre par rapport aux multiples d'un autre ; - multiplication à trous ; - ordre de grandeur d'un produit ; - ordre de grandeur d'un des deux facteurs du produit.	Donner des problèmes de distribution et des problèmes de partages équitables avec reliquat minimum.: la résolution est alors empirique; le champ numérique pour le dividende de 3 à 4 chiffres, pour le diviseur de 1 à 2 chiffres. Introduction de l'écriture $a = b \times q + r$ avec $r < b$. **Objectif** : que les procédures d'additions et de soustractions réitérées diminuent progressivement et qu'apparaissent des procédures multiplicatives organisées, de plus en plus économiques.
Prévoir des évaluations épisodiques sur le calcul mental..	Ce sont des compétences encours d'acquisition, ne donnant pas lieu à des évaluations de type sommatif.

CM1 premier trimestre.

Calcul mental.	Division dans N euclidienne.
cf. CE2	Reprise de problèmes de division et mise en place dans le cadre de résolution de ces problèmes de techniques algorithmiques pour la recherche du quotient et du reste: - ordre de grandeur du quotient (place du quotient par rapport aux puissances de 10) ; - utilisation de la liste des premiers multiples du diviseur ; - encadrement du quotient par des multiples du diviseur et de 10^n.

Objectifs de fin de premier trimestre.
- Savoir calculer à la main le quotient et le reste d'une division euclidienne.
- Savoir interpréter les nombres obtenus dans un problème de division (quotient par défaut, quotient par excès, reste,...).

Document réalisé par C.Houdement et M.L.Peltier, IUFM de Rouen.

CM1 second trimestre.

Calcul mental	Division dans N	Rationnels et décimaux
- Place d'une fraction entre deux entiers consécutifs. - Partie entière d'une fraction, d'un décimal. - Division par 10, 100, 1000,...	Entraînement systématique sur ce qui précède ; amélioration de la présentation des calculs ; utilisation de la calculatrice. Résolution de problèmes.	- Introduction de non entiers: les fractions. Vers la notion de quotient exact dans Q. - Ecriture d'une fraction sous forme de sa partie entière plus le "rompu" (23/5=4+3/5).

CM1 troisième trimestre.

Calcul mental	Division dans N	Rationnels et décimaux
- Comme au second trimestre. - Comparaison de fractions, de décimaux.	Vers une technique écrite de type "potence" (disposition traditionnelle française) avec encadrement préalable du quotient par les puissances de 10 et les soustractions intermédiaires écrites. Résolution de problèmes.	Travail plus spécifique sur les écritures: fractions décimales, passage des écritures fractionnaires aux écritures à virgule pour les décimaux.

Objectifs de fin de CM1 sur la division euclidienne dans N.
Posséder une technique algorithmique efficace pour résoudre de nombreux problèmes de division.

CM2 premier trimestre.

Calcul mental	Division dans N	Rationnels et décimaux
-Reprise des exercices du CM1. - Quotient d'un nombre de 2 chiffres, 3 chiffres par un nombre d'un chiffre (pour travailler les décompositions additives "favorables"). - Détermination du quotient d'un nombre écrit sous forme multiplicative,...	Reprise des points de CM1 par divers exercices : - analyse de diverses techniques de division dont la technique usuelle; - travail avec la calculatrice, en bloquant certaines touches, en cherchant plusieurs procédures pour trouver le reste ;..	Extension de la division à D: vers la notion de quotient approché à 0,1, 0,01,...près de deux entiers, à travers des problèmes. .

CM2 deuxième et troisième trimestres.
Recherche du quotient approché d'un entier par un entier, d'un décimal par un entier.
Valeur approchée à 0,1, 0,01,...près d'un décimal, d'un rationnel.

Document réalisé par C.Houdement et M.L.Peltier, IUFM de Rouen.

Introduction du quotient de deux décimaux (cet apprentissage n'est pas au programme de façon explicite, mais il est conseillé de rencontrer de tels problèmes et de généraliser la technique retenue à la recherche d'un quotient de deux décimaux non entiers).

Objectifs de fin de CM2 sur la division.
Reconnaître et savoir traiter des problèmes de division par une technique efficace.
Savoir traiter des calculs "simples" par des procédures mentales.
Savoir utiliser la technique usuelle avec soustractions posées pour trouver un quotient de deux entiers entier ou décimal et un quotient d'un décimal par un entier à la précision voulue par le contexte.

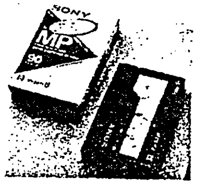
LA DIVISION : QUOTIENT EXACT

[MATH CM1 Une Outil (Magnard 1990)]

Activités préparatoires

1 **Combien de cassettes-vidéo contient un lot vendu 230 F ?**

SONY ***46 F***
Cassette vidéo VHS



• Tu as retiré ... fois 46 de 230.

• **Écris une opération qui traduira ce calcul.** Si tu as besoin d'une aide supplémentaire, reporte-toi au mémento.

POUR T'AIDER

Chaque cassette coûtant 46 francs ; tu cherches combien de fois tu peux enlever 46 de 230.

230 − 46 — 1re cassette
184 − 46 — 2e cassette
... − 46 − ...

2 À combien revient une pellicule ?

KODAK ***75 F***
Lot de 3

• Écris la division qui correspond à ce calcul. Si tu as besoin d'aide, reporte-toi au mémento.

POUR T'AIDER

75 = ■ × 3

75 : Prix du lot
3 : Nombre de pellicules du lot

À quoi correspond ■ ?

Exercices

1 En te servant de la multiplication correspondante, trouve le résultat des divisions suivantes :

27 : 3 =	72 : 8 =
56 : 7 =	99 : 9 =
28 : 2 =	130 : 10 =

2 Écris les deux divisions qui correspondent à chacune des multiplications suivantes :

30 = 5 × 6	120 = 10 × 12
42 = 6 × 7	84 = 21 × 4
51 = 17 × 3	159 = 3 × 53

3

COLLECTION DE
12 JACINTHES PRÉPARÉES
3 blanches, 3 rouges, 3 roses, 3 bleu foncé, chaque coloris emballé à part.
Bulbes de 15/16 cm de circ.
Réf. 45/658 Le paquet **F 48**

a) Calcule le prix d'une jacinthe.

b) Indique quels sont les renseignements fournis par cette publicité que tu n'as pas utilisés pour faire ce calcul.

Problèmes

1

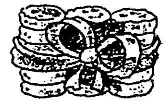
Toutes les cartes doivent être distribuées :

a) les joueurs utilisent un jeu de 32 cartes.

b) les joueurs utilisent un jeu de 52 cartes.

Dans chaque cas, que peux-tu calculer ?

2



Galettes Beg Meil
le lot de 3 paquets
dont 1 paquet gratuit

La garderie de l'école achète vingt-sept paquets de galettes Beg Meil. **Combien de paquets gratuits obtiendra-t-elle pour cet achat ?**

3 Frédéric mange deux petits suisses à chaque repas (déjeuner et dîner). Maman a acheté quatre plaquettes de six petits suisses. **Frédéric en aura-t-il assez pour la semaine ?**

Combien de jours exactement dureront les quatre plaquettes ?

4 **Écris un énoncé de problème dont la solution sera donnée par la division suivante :**

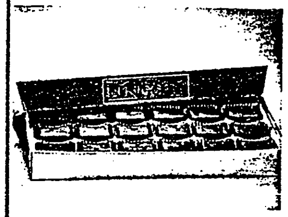
45 : 5 = 9

5 Deux classes de 34 et de 36 élèves organisent une rencontre de handball et de basket-ball. Sachant qu'une équipe de handball est constituée de 7 joueurs et celle de basket-ball de 9 joueurs, **calcule :**

• **le nombre d'élèves,**

• **le nombre d'équipes que l'on pourra former en handball ? en basket-ball ?**

Mémento



Les dix-huit lingots sont partagés entre trois enfants. Combien chacun d'eux en recevra-t-il ?

Le partage peut s'effectuer de deux manières :

1re manière

18 − 3 = 15 — 1
15 − 3 = 12 — 2
12 − 3 = 9 — 3
9 − 3 = 6 — 4
6 − 3 = 3 — 5
3 − 3 = 0 — 6

Chaque enfant a reçu 6 lingots.

2e manière

18 = 6 × 3

18 = Nombre de lingots dans la boîte.
6 = Nombre de lingots donnés à chaque enfant.
3 = Nombre d'enfants.

L'opération qui permet de réaliser un partage est une division.

On écrit :

18 : 3 = 6.

6 est le quotient de la division. Il est exact car il ne reste aucun lingot à distribuer.

Calcul mental

Complète les équations suivantes :

... = 7 × 8	88 = 11 ×	... = 50 × 5
150 = 15 ×	72 = ... × 8	39 = ... × 3

LA DIVISION AVEC RESTE

[MATH CM1 Ligne Outil (Magnard 1990)]

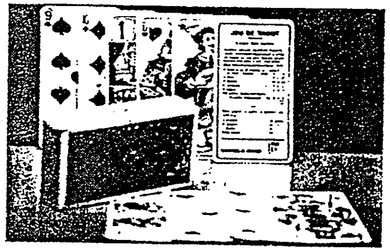
Activités préparatoires

1 Le tarot est un jeu de cartes qui peut se jouer à cinq joueurs. On distribue toutes les cartes, de manière à ce que chaque joueur en ait le même nombre. Celles qui restent constituent ce que l'on appelle « le chien ».

Sachant qu'il y a soixante-dix huit cartes dans le jeu, **combien chaque joueur aura-t-il de cartes ?**

Combien en restera-t-il au « chien » ?

Pour donner la réponse, complète l'équation : 78 = (. . . × 5) + . . .



POUR T'AIDER

Voici une partie du tableau des multiples de 5

50 = 10 × 5
55 = 11 × 5
60 = 12 × 5
65 = 13 × 5
70 = 14 × 5
75 = 15 × 5
80 = 16 × 5

Encadre 78 entre deux multiples de 5.

Combien de cartes peux-tu donner, au plus, à chacun ?

Dans ce cas, combien en reste-t-il ?

2 Une agricultrice ramasse 40 œufs. Elle les emballe dans des boîtes de 6. **Combien de boîtes pourra-t-elle remplir ? Lui restera-t-il des œufs ? Si oui, combien ?**

Complète l'équation :
40 = (. . . × 6) + . . .

POUR T'AIDER

- Fais le tableau des multiples de 6.
- 40 est-il un multiple de 6 ?
- Encadre 40 entre deux multiples de 6.

Exercices

1 Chacune de ces équations correspond à une division.

Indique le reste :

36 = (7 × 5) + . . .
86 = (9 × 9) + . . .
24 = (5 × 4) + . . .
77 = (8 × 9) + . . .
43 = (10 × 4) + . . .
76 = (6 × 12) + . . .

2 49 : 4

a) Écris la liste des multiples de 4.

b) Encadre 49 entre deux multiples de 4.

c) Complète l'équation.

49 = (. . . × 4) + ■.

d) Compare le nombre écrit dans la case rouge et le nombre écrit en bleu.

3 Pour chacune des divisions suivantes indique le quotient et le reste.

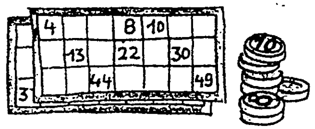
Attention le reste sera plus petit que le nombre par lequel on divise (nombre écrit en bleu).

Division	Quotient	Reste
48 : 5		
39 : 6		
51 : 8		
22 : 4		
41 : 7		
34 : 9		

Problèmes

1 On veut distribuer 29 cahiers à cinq enfants de façon à ce que chacun d'eux en reçoive le même nombre. **Combien chaque enfant recevra-t-il de cahiers ?**
Combien en restera-t-il ?

2 Le directeur de l'école organise un loto à la salle des fêtes. Cent vingt-cinq personnes se placent par table de huit.
a) Combien y-a-t-il de tables complètes ?
b) Combien de personnes s'installent à la dernière table ?



3 Sophie dispose de 61 F. Elle achète en librairie des magazines à 9 F. **Combien peut-elle en acheter ? Combien lui reste-t-il ?**

Avec la somme restante, elle achète des paquets de vignettes à coller à 2 F le paquet. **Combien de paquets peut-elle acheter ? Quelle somme lui reste-t-il ?**

Lequel de ces deux calculs donne la solution du problème ?

a) 9 + 2 = 11
61 : 11 = 5 reste 6.

b) 61 : 9 = 6 reste 7
7 : 2 = 3 reste 1.

Mémento

Pour la course d'endurance qui se court par équipes de quatre, cinquante et un élèves se sont présentés.

- **Combien d'équipes ont pu être formées ?**
- **Combien restait-il de remplaçants ?**

On établit le tableau des multiples de 4.

10 × 4 = 40 12 × 4 = 48
11 × 4 = 44 13 × 4 = 52

48 < 51 < 52
(12 × 4) < 51 < (13 × 4)

a) Il n'est pas possible de former treize équipes,
13 × 4 = 52 ;
on ne dispose que de cinquante et un élèves.

b) Il est possible de former douze équipes,
12 × 4 = 48 — 51 — 48 = 3.
Équation : 51 = (12 × 4) + 3

On peut former douze équipes et il reste trois remplaçants.

Calcul mental

45 = (6 × 7) + 3

Quels sont les nombres manquants ?

. . . = (7 × 8) + 5
92 = (30 × . . .) + . . .
77 = (. . . × 8) + 5

MATH CM1 Collection Chapuis Ed. Nathan 1989

29

DIVISER PAR UN NOMBRE ENTIER

21 : 7	En 21 combien de fois 7 ?	7 × 3 = 21 donc 21 : 7 = 3	
24 : 3	40 : 5	35 : 7	40 : 8	72 : 9
16 : 4	32 : 4	36 : 6	28 : 7	64 : 8

LA DIVISION : SENS DE LA DIVISION

Les trésors de Robinson Crusoé

- Lors de son exploration du bateau échoué, Robinson a trouvé 12 morceaux de sucre. Il les partage entre Vendredi, son chien et lui.

Il place d'abord un sucre devant chacun, puis un autre, puis encore un et continue ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sucres.

Voici son procédé :

	Part de Vendredi	Part du chien	Part de Robinson	Reste à distribuer
1re DISTRIBUTION				12 − 3 = 9
2e DISTRIBUTION				9 − 3 = 6
3e DISTRIBUTION				6 − 3 = 3
4e DISTRIBUTION				3 − 3 = 0
TOTAL	4 sucres	4 sucres	4 sucres	0

12 = • × 3

Robinson avait 12 sucres ;
il a distribué 4 fois 3 sucres.
4 sucres est la part de chacun.
Il ne reste aucun sucre.

Robinson a divisé 12 par 3
12 : 3 = 4

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ -\ 12 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

- Vendredi doit maintenant partager avec Robinson un régime de huit bananes.

Reproduis le tableau.

Part de Robinson	Part de Vendredi	Reste à distribuer
		8 − 2 = 6

8 = • × 2

Reste-t-il des bananes ? — $\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \bullet & \bullet \end{array}$ — Quelle est la part de chacun ?

Lorsqu'on partage pour chercher la part de chacun, on complète une multiplication.
36 = • × 3

Le nombre trouvé est le quotient exact des nombres 36 et 3.

On peut écrire : 36 : 3 = 12

Quand il existe un reste, il doit être inférieur à la valeur d'une part.
37 = (12 × 3) + 1   1 < 12

TRAVAUX ET EXERCICES

★

1 Complète l'égalité et écris la division correspondante.

7 × • = 35	5 × • = 45	6 × • = 48	4 × • = 32	8 × • = 64
8 × • = 72	9 × • = 36	7 × • = 49	3 × • = 21	8 × • = 32
6 × • = 42	5 × • = 15	5 × • = 30	7 × • = 56	3 × • = 18

2 Cinq enfants se partagent un lot de 30 images.
Recopie ce tableau et continue-le pour indiquer la part de chacun.

Part de					Reste à distribuer
PHILIPPE	HERVÉ	LUC	LAURE	ISABELLE	
□	□	□	□	□	30 − 5 = 25
□	□	□	□	□	25 − 5 = 20

3 28 élèves doivent se répartir en 4 équipes : l'équipe verte, l'équipe bleue, l'équipe jaune et l'équipe rouge. On choisit les joueurs un par un.
Quel est le nombre de joueurs de chaque équipe ?
Établis un tableau pour répondre à la question.

4 Quatre amis préparent leur randonnée pédestre. Ils rassemblent 54 kg de matériel qu'ils désirent se répartir également.
Est-ce possible ?

★★

5 ***Comment répartir 63 livres en 7 piles égales ?***

6 Complète ces énoncés de problèmes par une question ; résous ces problèmes.
- Dans un supermarché, 4 cahiers de textes sont vendus 36 F.
- Lors d'une séance d'éducation physique, les 27 élèves d'une classe se répartissent en 3 équipes.
- Alex doit partager 56 billes entre 7 camarades.
- Dans la salle de projection, le maître dispose 45 chaises en 5 rangées.

7 ***Quel est le prix du kg d'oranges dans chaque filet ?***

MATH CM1 Coll. Chapuis Ed. Nathan 1989

30

DIVISER PAR UN NOMBRE ENTIER

	120 : 4	*12 : 4 = 3 alors*	*120 : 4 = 30*	
150 : 3	450 : 5	210 : 7	480 : 8	630 : 9
180 : 2	360 : 6	240 : 4	640 : 8	480 : 8

LA DIVISION : NOMBRE DE PARTS

Les allumettes de Robinson Crusoé

Dans le bateau échoué, Robinson a trouvé 30 allumettes.
Prudemment, il prévoit d'utiliser 5 allumettes par semaine.

Voici ses prévisions :

	J'aurai utilisé	Il me restera
A la fin de la 1re semaine	5	30 − 5 = 25
A la fin de la 2e semaine	5 × 2	30 − (5 × 2) = 20
A la fin de la 3e semaine	5 × 3	30 − (5 × 3) = 15
A la fin de la 4e semaine	5 × 4	30 − (5 × 4) = 10
A la fin de la 5e semaine	5 × 5	30 − (5 × 5) = 5
A la fin de la 6e semaine	5 × 6	30 − (5 × 6) = 0

$30 = 5 \times \boxed{6}$

Ce calcul s'écrit sous forme d'une division :

30 : 5 = 6

Cette opération se pose et s'effectue ainsi :

$$\begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ -\ 30 & 6 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Les bougies de Robinson

Robinson découvre 12 bougies.
Il en utilisera 3 par semaine.

Complète le tableau de prévisions de Robinson.

	J'aurai utilisé	Il me restera
A la fin de la 1re semaine		
A la fin de la 2e semaine		

Écris la division qui donne la réponse.

- **Tu peux toujours transformer une multiplication en deux divisions.**

36 = 9 × 4 → 36 : 9 = 4 ; 36 : 4 = 9

- **36 : 4 = 9**

Je veux partager 36 timbres entre 4 enfants ; chaque enfant reçoit 9 timbres.
Ce quotient indique la part de chacun.

- **36 : 9 = 4**

Je veux constituer des pochettes de 9 timbres. J'obtiendrai 4 pochettes.
Ce quotient indique le nombre de parts réalisées.

TRAVAUX ET EXERCICES

★

1 Un commerçant doit emballer 32 bouteilles de soda par cartons de 8. Combien de cartons utilisera-t-il ?

Recopie et complète le tableau.

	Bouteilles emballées	Il lui reste
Dans 1 carton	8	32 − 8 = •
Dans 2 cartons		

2 Dans une colonie de vacances, 80 enfants doivent être répartis en équipes de 8.

Combien faut-il de moniteurs ?

3 Pour ranger 192 diapositives, Alex dispose de paniers pouvant contenir 48 diapositives.

Combien va-t-il en remplir ?

4 A la bataille, chaque joueur doit recevoir le même nombre de cartes.

Combien d'enfants peuvent jouer avec un jeu de 32 cartes si toutes les cartes sont distribuées ?

Il existe plusieurs possibilités.

★★

5 Pour remplir une boîte de chocolats, je dois y placer 28 chocolats.

Combien de boîtes vais-je remplir avec 168 chocolats ?

6 Observe l'exemple. Fais la même chose pour chaque division.

45 | 9 ; ?	45 = 9 × $\boxed{?}$ la réponse est 5	45 | 9 ; − 45 | 5 ; 0

72 | 8   56 | 7   48 | 8   63 | 9   49 | 7

★★★

7 Complète les énoncés de ces problèmes par une question ; résous ces problèmes.

- La cantine utilise chaque jour 40 kg de pommes de terre vendues en filets de 5 kg.
- Une randonnée cycliste couvre 250 km. Je veux parcourir 50 km par jour.

8 Voici des informations dans le désordre ; à toi de réécrire deux problèmes puis de les résoudre.

un étage mesure 3 m de haut.

une table regroupe 4 élèves

32 élèves

un immeuble mesure 27 m de haut

33 DIVISION (1)

Parmi les différentes façons de résoudre une situation de division (sans connaître la technique définitive), deux sont ici privilégiés (cf. *aide-mémoire*). Elles vont en effet servir de point de départ à la construction de la technique définitive.

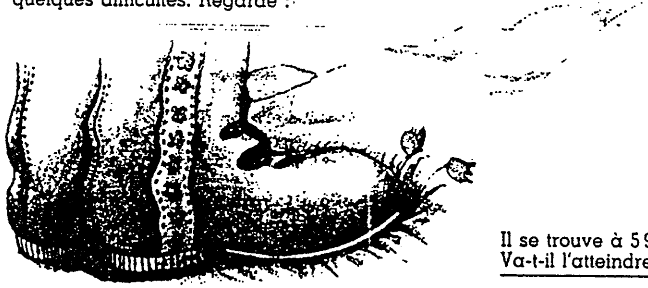
calcul rapide

Observe l'exemple et continue : 60 < 9 × 7 < 70

a/	b/	c/
..... < 6 × 8 <	..... < 4 × 8 <	..... < 4 × 6 < .....
..... < 5 × 9 <	..... < 6 × 6 <	..... < 9 × 3 < .....
..... < 9 × 9 <	..... < 9 × 8 <	..... < 4 × 7 < .....

découverte

La légende raconte que, dans les grandes plaines de Russie, le terrible géant Tneïtok était si grand qu'il ne pouvait se déplacer que par bonds de 24 verstes (verste : mesure russe qui vaut 1 km).
Mais cela lui posait parfois quelques difficultés. Regarde :



Il se trouve à 5 940 verstes de son château.
Va-t-il l'atteindre, et en combien de bonds?

Il existe des procédés divers pour résoudre une situation de division.

EXEMPLE :

Pour trouver combien de fois 24 dans 650 :

Procédé n° 1.
On ne fait que des **multiplications.**

24 × 30 = 720 → 30 fois ; trop grand
24 × 20 = 480 → 20 fois ; trop petit
24 × 25 = 600 → 25 fois ; trop petit
24 × 28 = 672 → 28 fois ; trop grand
24 × 27 = 648 → 650 = (24 × 27) + 2

Procédé n° 2.
On fait des **multiplications et des soustractions.**

```
  650
−  24   →  1 fois 24
= 626      +
−  48   →  2 fois 24
= 578      +
−  96   →  4 fois 24
= 482      +
− 192   →  8 fois 24
= 290      +
− 192   →  8 fois 24
=  98      +
−  96   →  4 fois 24
=   2      27 fois 24 → 27 fois 24, reste 2
```


OBJECTIF CALCUL CM1
(Hatier 1987)

EXERCICES

Utilise le procédé n° 1 de l'aide-mémoire pour résoudre le problème qui suit.
Un présentoir de livres de poche peut contenir 24 volumes. Combien le libraire va-t-il remplir de rayons avec les 360 livres qu'il vient de recevoir?

Utilise le procédé n° 1 de l'aide-mémoire pour faire les divisions suivantes :

a/ 728 : 40
450 : 32
847 : 55

b/ 254 : 18
780 : 37
2 430 : 21

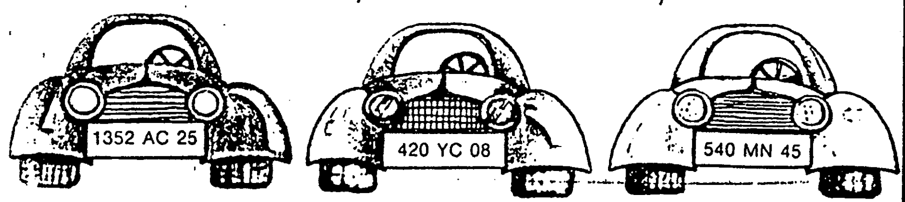
Utilise le procédé n° 2 de l'aide-mémoire pour faire les divisions suivantes :

a/ 1 412 : 81
648 : 42
127 : 12

b/ 628 : 42
3 750 : 25
3 050 : 145

Le célèbre pilote de course Paul Zed va prendre le départ du *Grand Prix de Coignières.* Sur la plaque d'immatriculation de sa voiture, le second numéro divise exactement le premier.
Retrouve la voiture de Paul Zed (utilise le procédé de ton choix).

a/ b/ c/

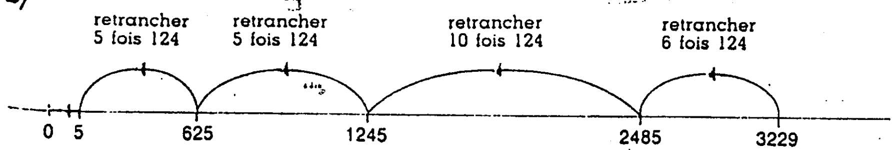


5 Voici les relevés de 2 procédés de résolution de divisions.

Pour chacun d'eux, retrouve :
- le nombre à diviser (le dividende),
- le nombre qui divise (le diviseur),
- le résultat (le quotient),
- le reste.

a/ 37 × 20 = 740 → trop grand
37 × 10 = 370 → trop petit
37 × 15 = 555 → trop petit
37 × 17 = 629 → trop petit
37 × 18 = 666 → reste 4.

b/



34 DIVISION (2)

Diviser a par b, c'est comparer a aux multiples de b.
Certains multiples de b sont privilégiés parce que leur calcul est immédiat : 10 b, 100 b, 1 000 b, etc.

calcul rapide

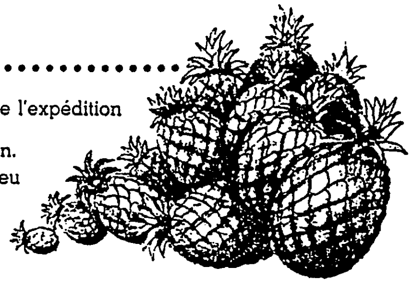
1. Observe les exemples et continue :

a/ 2 × 1 000 < 2 428 < 3 × 1 000
.... < 4 632 < ....
.... < 874 < ....
.... < 12 428 < ....
.... < 7 816 < ....

b/ 24 × 100 < 2 428 < 25 × 100
.... < 14 736 < ....
.... < 27 316 < ....
.... < 3 645 < ....
.... < 45 038 < ....

2. Observe et continue : 8 192 ; 4 096 ; 2 048 ; ....

découverte

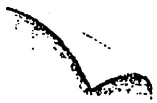


Monsieur Mathieu est responsable de l'emballage et de l'expédition des ananas cueillis à la plantation « La Belle Iloise ».
Ces ananas sont regroupés par 12 dans chaque carton.
Voici le bordereau d'envoi, rempli par monsieur Mathieu dans la semaine du 16 au 20 avril :

jours	nombre d'ananas reçus	nombre de cartons expédiés
lundi	2 984	.....
mardi	1 648	.....
mercredi	1 139	.....
jeudi	2 728	.....
vendredi	936	.....

Monsieur Mathieu n'a pas eu le temps de compléter la dernière colonne.
Pour l'aider, utilise le procédé n° 2 de l'aide-mémoire page 98 et complète le tableau en faisant le moins de soustractions possible.

Des multiples du diviseur faciles à trouver :



EXEMPLE :
Pour diviser 2 664 par 12, on va systématiquement utiliser les multiples de 12 suivants :

12 × 10 = 120
12 × 100 = 1 200

On a donc :

2 664	
− 1 200	→ 100 fois
1 464	+
− 1 200	→ 100 fois
264	+
− 120	→ 10 fois
144	+
− 120	→ 10 fois
024	+
− 12	→ 1 fois
12	+
− 12	→ 1 fois
0	222 fois

→ $\boxed{2\,664 = 12 \times 222}$

On a fait 6 soustractions.

OBJECTIF CALCUL CM1 (Hatier 1987)

EXERCICES

Complète :

a/ 12 × 10 = ...
27 × 10 = ...
36 × 10 = ...
108 × 10 = ...

b/ 14 × 100 = ...
7 × 100 = ...
42 × 100 = ...
437 × 100 = ...

c/ 6 × 1 000 = ...
18 × 1 000 = ...
542 × 1 000 = ...
708 × 1 000 = ...

Complète :
18 × 10 = ...; 18 × 100 = ...; 18 × 1 000 = ...
Utilise l'aide-mémoire pour résoudre de la même manière :
2 376 : 18 ; 432 : 18 ; 746 : 18

Complète :
27 × 10 = ...; 27 × 100 = ...; 27 × 1 000 = ...
Utilise l'aide-mémoire pour résoudre de la même manière :
630 : 27 ; 11 208 : 27 ; 3 844 : 27

Pour la projection de ce soir, Claire range les 250 diapositives de la classe de neige dans des paniers qui contiennent chacun 36 diapositives.
Combien lui faudra-t-il de paniers ?

Le confiseur prépare des cornets de dragées pour un baptême. Il y a 23 dragées dans 100 g.
Combien fera-t-il de cornets avec 3 kg de dragées s'il en met 25 dans chacun d'eux ?

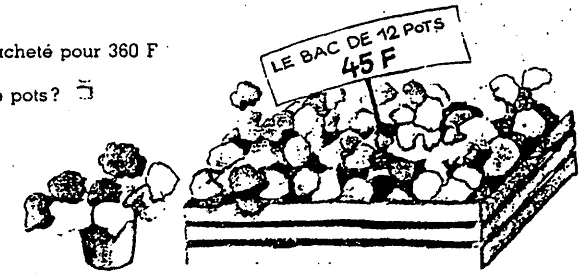
Le moto-cross de Vélizy a lieu sur une distance de 29 340 m. Chaque tour de circuit mesure 815 m.
Combien de tours les coureurs doivent-ils effectuer ?

Combien faut-il de paquets de 25 cahiers pour que les 114 élèves de l'école en ait chacun 3 ?

Les 108 enfants du centre de loisirs, accompagnés de 20 moniteurs, se rendent au cinéma. Dans la salle, chaque rangée comporte 13 fauteuils.
Combien de rangées le centre occupera-t-il ?

La bibliothèque municipale a prêté, au cours de l'année passée, 54 000 ouvrages. Il y a 4 500 abonnés.
Quel est, en moyenne, le nombre d'ouvrages lus par chaque abonné ?

Le fleuriste a acheté pour 360 F de géraniums.
Combien cela fait-il de pots ?



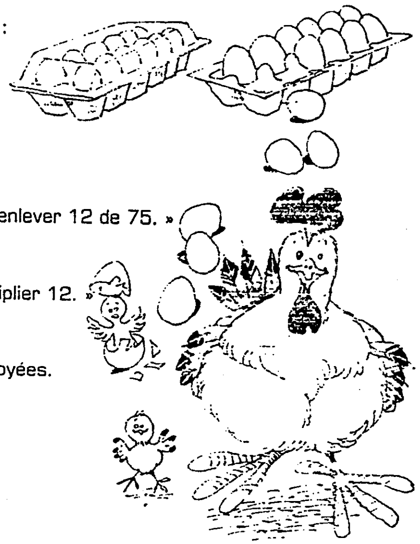
Math et Calcul CM1 Eiller (Ed Hachette 1987)

18 La division

RECHERCHE

1 Benoît et Marie ont réfléchi au problème suivant :

> Une fermière a ramassé 75 œufs.
> Elle les place dans des boîtes pouvant contenir chacune 12 œufs.
> Trouve le nombre de boîtes qu'elle peut remplir complètement et le nombre d'œufs qui restent.



a/ Benoît dit : « J'ai cherché combien de fois je pouvais enlever 12 de 75. »
♦ Fais les calculs de Benoît.

b/ Marie dit : « J'ai cherché par combien je pouvais multiplier 12. »
♦ Fais les calculs de Marie.

c/ Compare les résultats obtenus et les méthodes employées.

♦ Combien de boîtes as-tu trouvées ?
Ce nombre est le *quotient* de la division de 75 par 12.

♦ Combien d'œufs reste-t-il ?
Ce nombre est le *reste* de la divison de 75 par 12.

2 a/ Observe les calculs suivants :

50 = (12 × 1) + 38
50 = (12 × 2) + 26
50 = (12 × 3) + 14
50 = (12 × 4) + 2

La dernière égalité correspond à la division de 50 par 12.
Le quotient est 4.
Le reste est 2.

b/ Observe l'égalité suivante :

$\boxed{36 = 12 \times 3}$

Cette égalité correspond à la division de 36 par 12.
Le quotient est 3.
Le reste est 0.

Dans ce cas, on peut écrire : $\boxed{36 : 3 = 12}$

3 Prends ta calculatrice pour diviser 36 par 12. Recopie et complète la grille.

Je tape					
Je lis					

♦ Utilise ta calculatrice pour diviser 50 par 12.
Dis ce que tu constates.

APPLICATIONS

1 Calcule rapidement.

35 : 5 = ___
48 : 6 = ___
72 : 9 = ___

42 : 7 = ___
42 : 6 = ___
81 : 9 = ___

63 : 7 = ___
63 : 9 = ___
56 : 8 = ___

80 : 10 = ___
54 : 6 = ___
0 : 4 = ___

2 Calcule en utilisant le procédé de Benoît ou celui de Marie.

85 : 17
117 : 13

128 : 16
112 : 14

180 : 36
192 : 24

270 : 45
140 : 20

♦ Vérifie à l'aide de la calculatrice.

3 Calcule rapidement le *quotient* et le *reste* de chaque division.

Exemple : 42 divisé par 4.
42 = (4 × 10) + 2 Le quotient est 10. Le reste est 2.

55 divisé par 6
45 divisé par 7

48 divisé par 5
58 divisé par 8

92 divisé par 9
75 divisé par 10

4 a/ Observe l'exemple ci-dessous.

(21 + 18) : 3 = (21 : 3) + (18 : 3)
= 7 + 6
= 13

♦ Calcule de même :

(20 + 15) : 5
(36 + 27) : 9
(35 + 14) : 7

(40 + 12) : 4
(40 + 16) : 8
(42 + 14) : 7

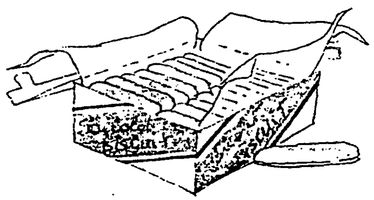
b/ Observe l'exemple ci-dessous.

72 : 6 = (60 + 12) : 6
= (60 : 6) + (12 : 6)
= 10 + 2
= 12

♦ Calcule de même :

75 : 5 = ___
84 : 7 = ___
95 : 5 = ___

78 : 6 = ___
72 : 3 = ___
108 : 9 = ___



5 Six enfants veulent se partager les 78 biscuits contenus dans une boîte.
Chaque enfant veut avoir le même nombre de biscuits que ses camarades.

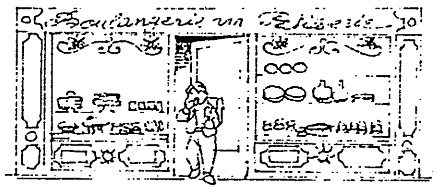
♦ Trouve le nombre de biscuits que chaque enfant aura.

Math et Calcul CM1 Eiller (Hachette 87)

La division

6 Le premier jour de chaque mois, maman donne 25 F à son fils Julien.
Tous les matins, il achète un petit pain à 3 F.

♦ Au bout de combien de jours Julien n'aura-t-il plus assez d'argent pour acheter son petit pain ?



7 Joëlle a 78 pièces de 1 F.
Elle fait des piles de même hauteur disposées comme l'indique le dessin ci-dessous.

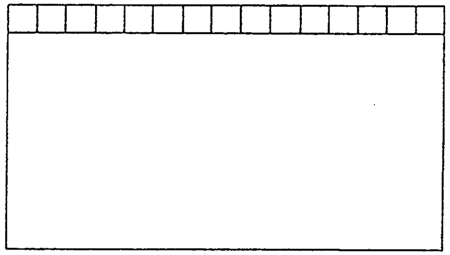
♦ Combien de pièces y a-t-il dans chaque pile ?

8 * Un carreleur a 4 boîtes de 50 carreaux chacune.

Il a besoin de 15 carreaux pour une rangée.

a/ Combien de rangées complètes peut-il poser ?

b/ Combien de carreaux y aura-t-il dans la rangée incomplète ?

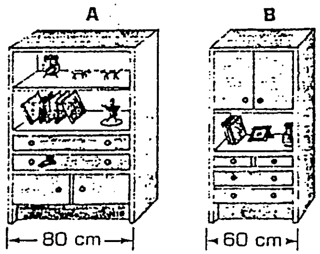


9 Observe.

a/ Combien d'éléments A peut-on placer le long d'un mur de 340 cm ?

b/ Même question si l'on veut placer des éléments B.

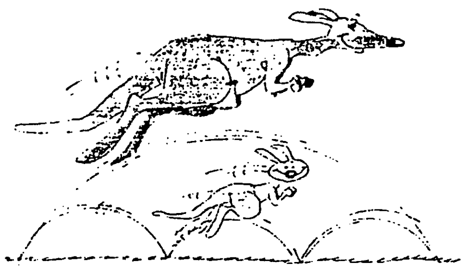
c/ Dans quel cas y aura-t-il le moins de place perdue ?



10 * Lorsqu'un bébé kangourou fait trois sauts, sa maman n'en fait qu'un.

a/ Maman kangourou a fait 25 sauts.
Combien de sauts a fait bébé kangourou ?

b/ Bébé kangourou a fait 39 sauts.
Combien de sauts a fait maman kangourou ?



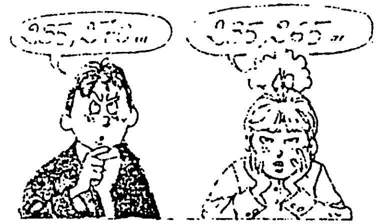
La division

11 Patrice et Carole comptent « à l'envers » en partant du nombre 285.

— Patrice compte de 15 en 15.
— Carole compte de 20 en 20.

a/ Trouve le dernier nombre que dira chaque enfant.

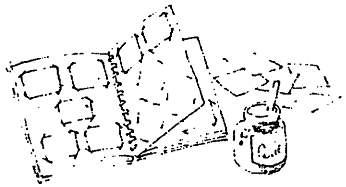
b/ Lequel des deux enfants aura fait le moins d'opérations ?



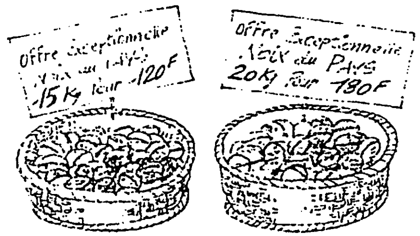
PROBLÈMES

1 Pendant les vacances, Pierre a utilisé 4 films de 24 poses chacun.
À son retour de vacances, il colle 5 photographies sur chaque feuille d'un album.

♦ Que peux-tu calculer ?



2 * Observe les affiches de deux marchands.



♦ Chez lequel des deux marchands le kilogramme de noix est-il le moins cher ?

CALCUL mental

①	②	③	④
10 × 2	(10 + 2) × 2	(20 + 9) × 2	23 × 2
30 × 2	(10 + 5) × 2	(20 + 4) × 2	32 × 2
20 × 2	(10 + 3) × 2	(30 + 6) × 2	44 × 2
70 × 2	(10 + 4) × 2	(40 + 2) × 2	34 × 2
90 × 2	(10 + 8) × 2	(60 + 6) × 2	72 × 2
80 × 2	(10 + 7) × 2	(80 + 2) × 2	81 × 2
60 × 2	(10 + 1) × 2	(50 + 4) × 2	38 × 2
50 × 2	(10 + 9) × 2	(20 + 8) × 2	29 × 2
40 × 2	(10 + 6) × 2	(60 + 5) × 2	65 × 2
100 × 2	(10 + 10) × 2	(30 + 7) × 2	77 × 2

Séquence 4. Division au CM 1

I. Buts

Il s'agit de la première séquence sur la division au CM 1. Elle se situe au début du deuxième trimestre de l'année scolaire. Elle a pour objet d'amener les enfants à produire différentes procédures de calcul du quotient et du reste dans une situationde division.

Dans les séquences suivantes, à partir de nouvelles situations, on privilégiera certaines de ces procédures que l'on fera évoluer progressivement jusqu'à élaborer une technique de division.

II. Organisation de la classe

La séquence que nous décrivons a duré 1 h 30. Les enfants sont par groupes.

III. Activités

DÉROULEMENT	OBSERVATIONS
La maîtresse propose la situation suivante aux élèves: Un éditeur doit expédier 8 295 livres Comment va-t-il s'y prendre? E. - Ça dépend s'il les envoie à la même personne ou pas. E. - De toutes façons, il faut qu'il fasse plusieurs paquets. E. - Oui, oui, surtout qu'à la poste les paquets ne peuvent pas dépasser 3 kilos. E. - On n'est pas obligé de les envoyer par la poste. E. - Ça risque de faire beaucoup de paquets. M. - Oui, et combien à votre avis? E. - Ça dépend du nombre de livres qu'on met dans chaque paquet. M. - Est-ce qu'on peut décider de ce nombre de livres? Combien proposez-vous? Après une brève discussion, l'ensemble de la classe se met d'accord sur 25. M. - Vous avez désormais tous les éléments pour calculer combien l'éditeur peut expédier de paquets. M. - Mettez-vous au travail. Après 5 minutes tous les groupes semblent en difficulté. E. - Madame, on a posé la division mais on ne sait pas la faire 8 295 | 25	Dans les différents groupes, on constate que les enfants posent une division (8 295 : 25). Ils sont très rapidement arrêtés parce qu'au CE 2 ils ont bien étudié la technique de la division par un nombre à 1 chiffre. Mais ce mécanisme est oublié, ou tout simplement pas transposable directement au cas de cette division par 25.

DÉROULEMENT	OBSERVATIONS
En 8295 combien de fois 25, en ...? M. - Puisqu'il en est ainsi, vous allez essayer de faire le calcul en utilisant les opérations que vous connaisez. Essayez de vous tirer d'affaire comme cela. Le travail de groupe qui s'ensuit dure environ 25 minutes. La mise en commun fait apparaître les procédures suivantes:	
GROUPE 1 - On a cherché à atteindre 8295, en multipliant par un nombre de plus en plus grand. 25 x 19 = 325 25 x 25 = 625 25 x 30 = 750 25 x 40 = 1 000 25 x 80 = 2 000 25 x 100 = 2 500 25 x 280 = 7 000 25 x 385 = 9 625 Le nombre de paquets est donc compris entre 280 et 385 25 x 295 = 7 375 25 x 320 = 8 000 Nous n'avons pas eu le temps de terminer.	Ici, les enfants ont effectivement cherché à atteindre 8 295 à l'aide de multiples de 25. Le choix de ces multiples n'est pas arbitraire, ils sont de plus en plus grands au début, puis compris entre 25 x 280 et 25 x 385 ensuite. Cependant les enfants n'hésitent pas à poser les multiplications donc ne cherchent pas une économie de calcul à ce niveau (qui est cependant effectué pour 25 x 40, 35 x 80, 25 x 100).
GROUPE 2 et 3 On a vu que si on faisait 100 p. cela correspondait à 2 500 livres 25 x 100 = 2 500 et on a cherché ce qui restait, et ainsi de suite... 8295 - 2500 100 paquets 5795 - 2500 100 paquets 3295 - 2500 100 paquets 0795 - 250 10 paquets 545 - 250 10 paquets 295 - 250 10 paquets 045 - 25 1 paquet 20 331 paquets	La procédure mise en œuvre ici est celle qui sera privilégiée. Il est intéressant de faire remarquer que dans les trois premières soustractions (qui concernent les centaines de paquets) les seuls chiffres qui interviennent au niveau du calcul pour 8 295 sont le 8 et le 2. (Il y a 82 centaines dans 8 295) 95 se retrouve intégralement dans le reste partiel de cette suite de soustractions, à savoir 795. On peut prolonger cette remarque pour le 3 dans la suite du calcul. On trouve là une justification à l'expression: «j'abaisse le chiffre suivant» qui sera utilisé ultérieurement.

DÉROULEMENT / **OBSERVATIONS**

GROUPE 4

- On s'est dit que si on calculait combien ça fait 1 paquet, puis 2 paquets, puis 3 paquets et ainsi de suite, on finirait bien par trouver combien il faut de paquets pour 8295 livres.

25 1
50 2 (tous les résultats
75 3 intermédiaires ont été calculés par
800 32 les enfants)
825 33

- Là, on a vu qu'on avait les 2 premiers chiffres de 8 295, alors on a multiplié par 10.

8 250 330
8 275 331 et il reste 20 livres.

Observations : On retrouve les principes mis en œuvre par les enfants des groupes 1 et 5 qui sont systématisés à l'extrême au moins jusqu'à 33 × 25.
Il est à noter que les enfants ont posé toutes les multiplications et n'ont jamais pensé à ajouter 25 au précédent résultat. Ils ont pourtant été capables de passer directement de 33 × 25 à 330 × 25.
Ils ont de nouveau posé la multiplication de 331 × 25.

GROUPE 5

- On a essayé de voir combien de fois 25 était reproduit dans 8 295.

4 × 25 = 100
8 × 25 = 200
80 × 25 = 2 000 c'est trop petit
800 × 25 = 20 000 c'est trop grand
160 × 25 = 4 000
320 × 25 = 8 000
8 × 25 = 200 331 caisses
3 × 25 = 75
Il reste 20 livres.

Observations : Le mode de calcul tenu ici est le même que pour le groupe 1.
Cependant, le choix des multiples est conditionné par la possibilité de les calculer mentalement, ce qui explique les cœfficients retenus: 4, 8, 80, 160, 320...
Les enfants ont utilisé à plein les propriétés de la multiplication (ou des fonctions linéaires): 160 × 25 est le double de 80 × 25... etc.

GROUPE 6

- Nous nous sommes dits que pour chaque paquet fait il y avait 25 livres de moins à expédier.
- On a donc posé toutes ces soustractions.

8 295
− 25 1 paquet
8 270
− 25 1 paquet
8 245
− 25 1 paquet
8 220

Ça commençait à être un peu long alors on a pensé à enlever 10 paquets à la fois.

8 220
− 250 10 paquets
7 970
− 250 10 paquets
7 720

- Le nombre ne diminuant toujours pas très vite alors on a enlevé 2 500 (les livres de 100 paquets)

7 720
− 2 500 100 paquets
5 220
− 2 500 100 paquets
2 720
− 2 500 100 paquets
220
− 100 4 paquets
120
− 100 4 paquets
20

Il reste 20 livres et on a fait en tout 331 paquets.
- Notre méthode était longue mais on y serait certainement arrivé.

Observations : On retrouve ici la procédure des groupes 2 et 3, mais alors que dans ces deux derniers groupes les enfants avaient cherché à enlever immédiatement un grand nombre de livres correspondant à un nombre de paquets du type 10^n, ici les enfants n'y sont venus que progressivement par souci de réduire le nombre de soustractions.
Il sera intéressant dans l'avenir de faire remarquer que le choix du multiple le plus grand possible de la forme $10^n \times 25$ est déterminé en quelque sorte par un encadrement initial que l'on fait implicitement (ici $100 \times 25 < 8\,295 < 1\,000 \times 25$) et que ce choix donne le nombre de chiffres du quotient (ici 3) et du même coup le nombre minimum de soustractions à faire (3 : une pour les centaines, une pour les dizaines, une pour les unités).
On cherchera par la suite à faire la division en un nombre de coups qui se rapproche le plus possible du nombre minimum.

GROUPE 7

- On a calculé pour un certain nombre de paquets combien cela faisait de livres.

1 000 × 25 = 25 000 trop grand
100 × 25 = 2 500 trop petit

Le nombre de paquets est compris entre 100 et 1 000.

500 × 25 = 12 500 trop grand
200 × 25 = 5 000 trop petit
400 × 25 = 10 000 trop grand

C'est compris entre 200 et 400

300 × 25 = 7 500 trop petit
350 × 25 = 8 750 trop grand
340 × 25 = 7 750 trop petit
320 × 25 = 8 000 trop petit
330 × 25 = 8 250 trop petit
340 × 25 = 8 500 trop grand

Le nombre de paquets est compris entre 330 et 340.

331 × 25 = 8 275
+ 20
8 295

Observations : La méthode mise en œuvre ici, suppose la recherche d'encadrements de plus en plus fins de 8 295 par deux multiples de 25 jusqu'à obtenir un encadrement entre deux multiples consécutifs (qui ici n'a pas été explicité :
$331 \times 25 \leqslant 8\,295 \leqslant 332 \times 25$).
On calcule ensuite l'écart entre la borne inférieure et 8 295, ce qui donne le reste de la division.

GROUPE 8

- Nous avons vu que 95 c'était 75 + 20, donc on peut déjà faire 3 paquets et il reste 20 livres.
- Après on a essayé de faire pareil pour 8 000 et 200 et ça marchait.

M. - Pourquoi avez-vous procédé ainsi ?
- Parce que 8 295 = 8 000 + 200 + 95

DÉROULEMENT	OBSERVATIONS
- On sait que $4 \times 25 = 100$ donc $8 \times 25 = 200$ $16 \times 25 = 400$ $32 \times 25 = 800$ $320 \times 25 = 8\,000$ - On peut donc faire $320 + 8 + 3 = 331$ paquets et il reste 20 livres.	La méthode utilisée ici bien que très astucieuse n'est pas générale, elle utilise le fait que 25 est un diviseur de tous les 10^n pour un autre nombre il risque d'apparaître des restes partiels dont la somme excède le dit nombre (d'où des paquets supplémentaires).

Tous les travaux des 8 groupes restant affichés au tableau la maîtresse questionne les enfants sur la qualité des procédures après que l'on se soit assuré que tous les résultats étaient identiques (on termine les calculs du groupe 1).

M. - A votre avis quelle est la méthode qui est à la fois la plus simple, la plus rapide. E. - Celle du groupe 8. M. - Pourquoi ?	
E. - Parce que leurs calculs sont simples et il y en a pas beaucoup, et moi je trouve que c'est bien de décomposer le nombre comme pour la multiplication. M. - C'est exact mais en aurait-il été de même si l'on avait fait des paquets de 35. E. - Ça aurait été plus dur. M. - A part cette méthode donc, que pouvez-vous dire des autres ? E. - C'est sûr que c'est les groupes 2 et 3 qui sont allés plus vite, et puis c'est bien présenté.	Les enfants perçoivent bien la qualité du calcul du groupe n° 8. Il sera d'ailleurs assez difficile de leur faire comprendre que c'est une méthode difficilement généralisable.
E. - Le groupe 6 a fait pareil aussi mais c'est plus long. E. - Les autres ils ont fait des multiplications mais un peu au hasard. M. - Vous avez donc tous trouvé le nombre de paquets et le nombre de livres restants. Est-ce que vous avez fait une division ? Réponse unanime : « non ». M. - Pourtant il s'agit bien d'un problème de division (puisque vous avez tous essayé de la faire au début) et vous avez bien calculé un quotient 331 et un reste 20, quotient et reste de la division de 8 295 par 25. M. - Alors pour moi vous avez tous fait une division - pas avec la méthode habituelle, mais en combinant les autres opérations que vous connaissiez. Ce n'est pas autre chose la division ; et dès la prochaine séance nous allons voir comment à partir des soustractions successives on peut construire la technique habituelle.	La discussion se prolonge au-delà de ces quelques phrases que nous avons relevées et l'ensemble de la classe convient que faire des soustractions successives (en organisant les calculs) semble constituer la meilleure méthode dans l'immédiat.

Etude des pratiques à travers quelques écrits de formation

Nombre entier, numération

- IFM de Grenoble (1987) numéro 19, "Partage en grande section de maternelle", Une organisation de situations de formation basée sur une liaison avec le terrain, du côté de la *transposition et de la monstration.*
- D.Ortolland (1990), Actes de Paris, p128-129, propositions du côté de la *transposition*
- R.Charnay (1988) p57-68, Actes de Rouen, Comparaison en formation de 3 projets de travail au CP sur le thème de la décomposition des nombres, un exemple de *transposition*
- D.Butlen (1992), Documents de Pau, p197-198, Proposition d'un plan d'enseignement sur le nombre et la numération, entre stratégie *culturelle,* via une homologie action (?) et de *transposition.*

Opérations en général

- D.Valentin (1988), Actes de Rouen p69-70, Fiche de préparation pour une prise en charge par les étudiants d'une opération, un travail de *transposition* (le savoir didactique de référence étant explicité)

Addition : pas étudiée pour elle-même, toujours en relation avec les problèmes additifs et la soustraction

Soustraction

- IFM de Grenoble (1987) numéro 19, Situations soustractives au CE1 avant et après apprentissage, élaboration de séquences avec des étudiants et analyse, du côté de la *transposition et de la monstration.*
- collectif (1991 Documents Cahors, deux cours sur la soustraction et les problèmes additifs (*culturel didactique*), une étude de situation plutôt du côté de la *transposition*
- D.Butlen (1992), Documents de Pau, p197-198, Proposition d'un plan d'enseignement sur les structures additives, plutôt du côté *transposition,* éventuellement avec une dévolution du thème du côté d'une homologie indirecte.

Multiplication

-D.Butlen (1988) Actes d'Olivet p194-201, réflexion sur les problèmes multiplicatifs, sur une séquence d'introduction de la multiplication, plutôt du côté de la *transposition*
-D.Butlen, M.Pézard (1991) Documents Cahors p115-121, Etude d'une préparation sur les écritures multiplicatives, du côté de la *transposition*
-J.Euriat, C.Rimbault (1992) Documents de Pau, p159-161, Un manuel de CE1 présente la multiplication, une étude de manuel du côté de la *transposition*

Division (voir les références détaillées dans l'étude du thème en partie 2)

Nombres autres qu'entiers : fractions, décimaux, réels (et opérations sur ces nombres)

- Analyse de documents (introduction des décimaux, multiplication des décimaux) (1992), Documents de Pau , p161-170: des exemples d'exploitation de type stratégie de *transposition*
- J.Briand, G.Vinrich, (1992) Documents de Pau, p9-13, Exemple d'un cours sur Enseignement des rationnels et des décimaux, dont il est dit qu'il ne constitue pas un modèle idéal, mais existe sous les contraintes institutionnelles du centre de formation, donc un exemple de *culturel mathématique et didactique* (donc effet de *transposition*)
- M.Frémin, G.Deramecourt, (1992) Documents de Pau, p 17-30, Deux exemples de débats autour de la culture mathématique, en quelque sorte une stratégie *culturelle via une homologie action*

Fonctions numériques (voir les références liées au thème)

Mesure des grandeurs

- collectif (1991), Documents Cahors p11-28, une réflexion sur les savoirs mathématiques, épistémologiques et didactiques en jeu, 2 situations plutôt d'*homologie* sur la mesure des aires (M.C.Chevalier)
- C.Houdement, M.L.Peltier (1992), Documents Pau, Aires de surfaces planes, encore une situation du côté de l'*homologie* et des éléments de transposition

Géométrie des figures planes

- M.L.Peltier (1990) Actes de Paris p91-99, Utilisation du document La Fleur en FP

- H.Péault (1990),Actes de Paris p100-106, Reproduction de figures géométriques
- C.Houdement, M.L.Peltier (1991), Documents Cahors, Assemblages de triangles
- J.C.Ducorail (1991), Documents Cahors,, Activités géométriques sur quadrillage
- H.Péault, (1991), Documents Cahors, Quadrilatères particuliers,

des exemples de situations conduites dans une stratégie d'*homologie avec transposition* plus ou moins marquée

Géométrie des solides

- D.Butlen, M.Pézard (1991), Documents Cahors, Interactions espace-plan
- D.Beaufort,(1991), Documents Cahors, Représentations des solides

des exemples de situations conduites dans une stratégie d'*homologie avec transposition* plus ou moins marquée

- M.C.Chevalier (1992) Documents de Pau, p 125-130, Une activité autour des polyèdres réguliers, une *homologie avec quelques éléments de transposition*
- M.Frémin (1992) Documents de Pau, p 135-138, Pyramides bizarres, idem.

Géométrie des transformations planes

- J.Vincent (1992) Documents de Pau p89-91, Pavages et isométries, un exemple d'*homologie sans transposition* (mais il semble que le savoir mathématique ait posé problème) suivie d'une séance de *transposition,* difficile par manque d'expérience de la classe des étudiants
- D.Butlen (1992) Documents de Pau p101-121, Pavages, isométries et transformations géométriques : là encore *homologie avec faible transposition*

Maternelle (autre que numérique)

- autour de J.Bolon, Actes de Guéret (1985), Quimper (1986), p135-152 :propositions du côté de la *transposition* après une mise en situation action homologique pour les étudiants
- autour de M.H.Salin (1988), Actes de Rouen p.99-111, réflexions globales, pas de proposition de situation effective de formation

Résolution de problèmes, raisonnement

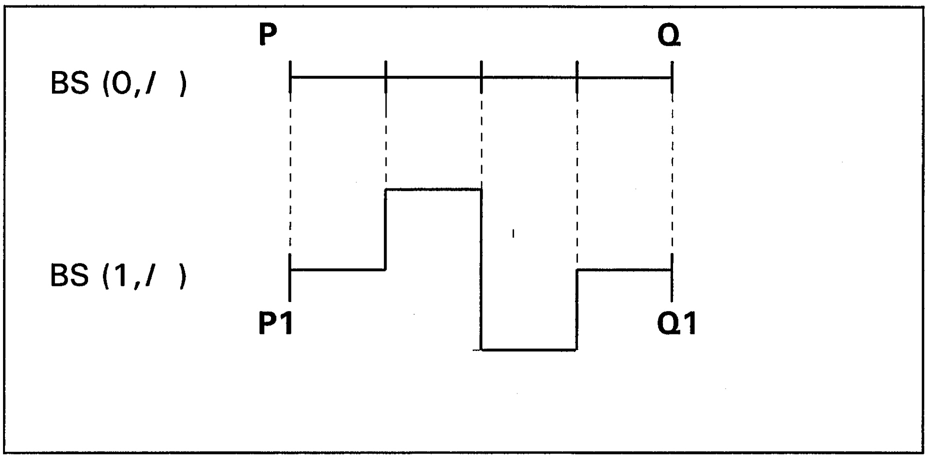
- R.Neyret (1989) Actes de Bordeaux p101-113, stratégie de *transposition* via une mise en situation
- M.Worobel (1990) Actes de Paris, p107-108
- J.Briand (1991) Documents Cahors p97-99, Les transvasements
- H.Péault (1991) Documents Cahors p101-103, La vache et le paysan
- G.Deramecourt (1992) Documents de Pau p141-143, Partage,

plusieurs situations de type *homologie indirecte pour quelques éléments de transposition* : débat socio-cognitif, preuve, argumentation, etc.

Détail du programme en LOGO permettant d'obtenir S_n

S(n,l) désigne la surface de rang n et S(0,l) est un carré de de côté l.

BS (n, l) désigne la ligne brisée, frontière de S(n,l), entre les points P et Q, [PQ] désignant un côté du carré de côté l : ainsi BS (0, l) = [PQ].



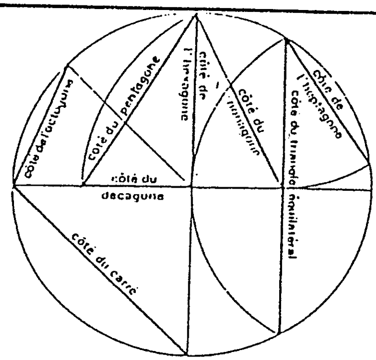

```
POUR   BS :N  :L
SI   EGAL? :N  0   [ AV  :L   STOP]
BS  :N - 1  :L / 4
TG   90
REPETE   2 [ BS  :N - 1   :L / 4   TD  90]
BS  :N - 1   :L / 4
REPETE  2 [ BS  :N - 1   :L / 4    TG  90]
BS  :N - 1   :L / 4
TD   90
BS  :N - 1   :L / 4
FIN
```

```
POUR    S :N  :L
REPETE   4  [ BS   :N  :L     TD  90]
FIN
```

Pour construire des figures tu peux utiliser les renseignements suivants :

Constructions exactes à la règle et au compas : pour les polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 côtés.

Les constructions de l'heptagone (7 côtés) et du nonagone (9 côtés) sont approchées.

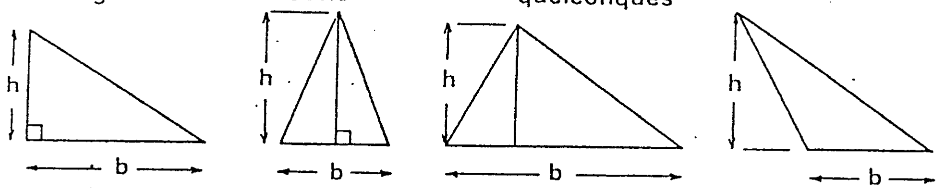


FORMULES

• aires des polygones

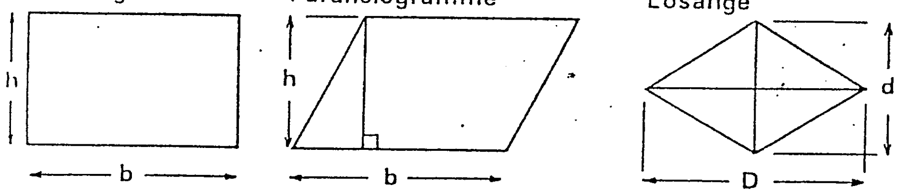
TRIANGLES ET QUADRILATÈRES

Triangle rectangle — Triangle isocèle — Triangles quelconques



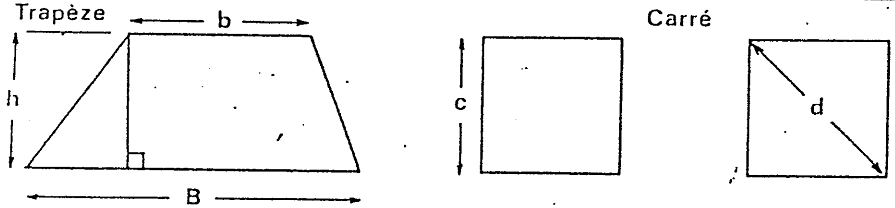
$S = \frac{b \times h}{2}$ — $S = \frac{b \times h}{2}$ — $S = \frac{b \times h}{2}$

Rectangle — Parallélogramme — Losange



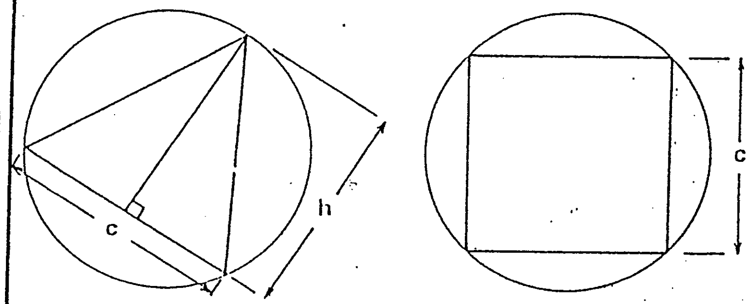
$S = b \times h$ — $S = b \times h$ — $S = \frac{D \times d}{2}$

Trapèze — Carré



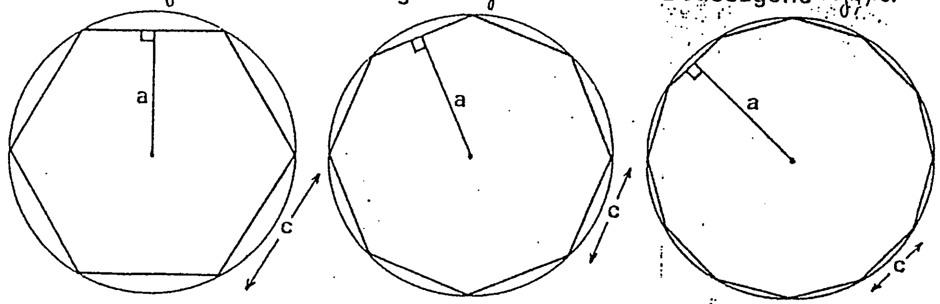
$S = \frac{B+b}{2} \times h$ — $S = c^2$ — $S = d^2 : 2$

Triangle équilatéral — Carré



$A = \frac{1}{2} \times c \times h$ — $A = c \times c$

Hexagone régulier — Octogone régulier — Dodécagone régulier



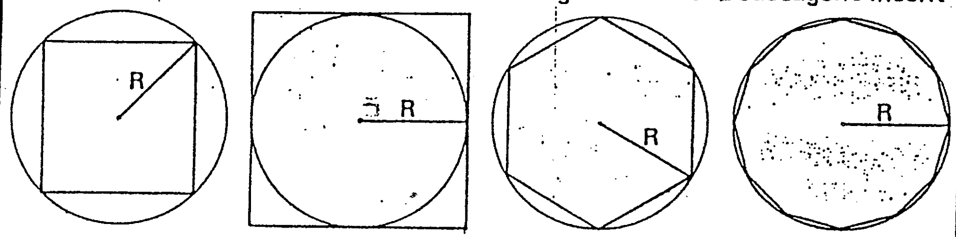
$S = p \times a$ — $S = p \times a$ — $S = p \times a$

p: demi périmètre — a: apothème

• périmètre du cercle - aire du disque

POLYGONES RÉGULIERS INSCRITS ET EXINSCRITS. FORMULE D'AIRE

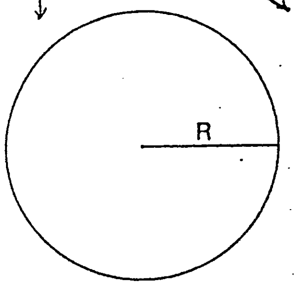
Carré inscrit — Carré exinscrit — Hexagone régulier inscrit — Dodécagone régulier inscrit



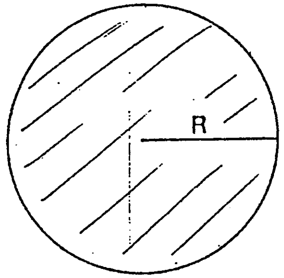
$A = 2 \times R^2$ — $A = 4 \times R^2$ — $2{,}5 \times R^2 < A < 2{,}7 \times R^2$ — $A = 3\,R^2$

CERCLE ET DISQUE - PÉRIMETRE ET AIRE

Cercle et disque: Périmètre et aire

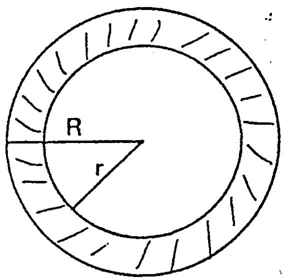


$P = 2 \times \Pi \times R$



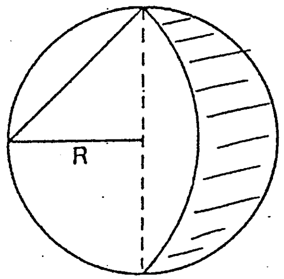
$A = \Pi \times R^2$

Couronne



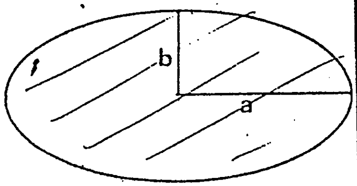
$A = \Pi (R^2 - r^2)$

Croissant



$S = R^2$

Ellipse



$S = \Pi \times a \times b$

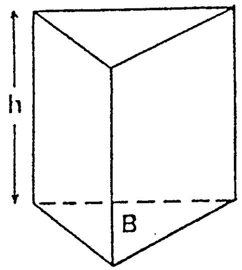
Des encadrements de π.

$1 < \pi < 10$ $\quad$ $3 < \pi < 4$

$\frac{21}{7} < \pi < \frac{22}{7}$ $\quad$ $\frac{354}{113} < \pi < \frac{355}{113}$

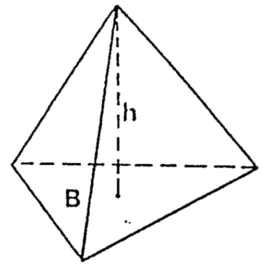
$3{,}141\,592 < \pi < 3{,}141\,593$

Prisme droit



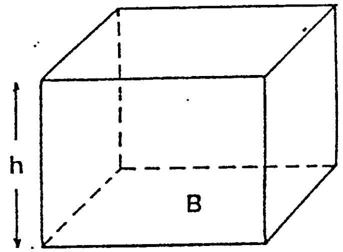
$V = B \times h$

Tétraèdre



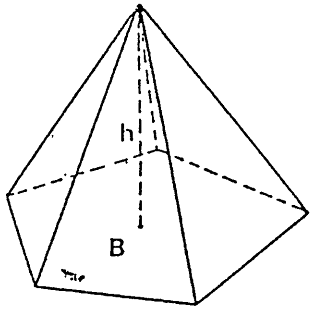
$V = \frac{1}{3} B \times h$

Parallèlépipède



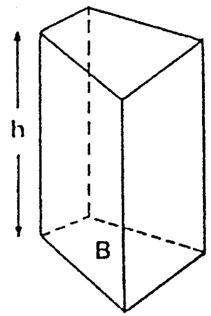
$V = B \times h$

Pyramide



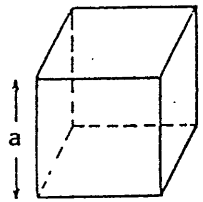
$V = \frac{1}{3} B \times h$

Prisme



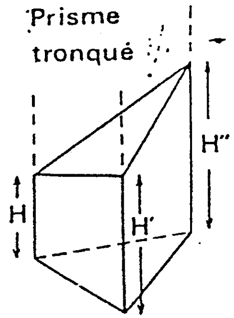
$V = B \times h$

Cube



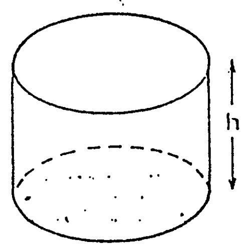
$V = a^3$

Prisme tronqué



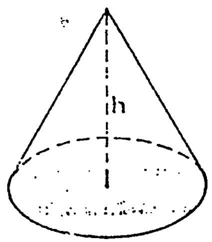
$V = \frac{1}{3} B \times (H + H' + H'')$

Cylindre



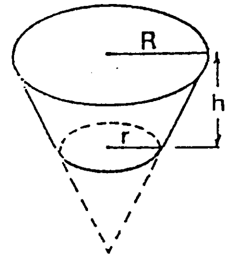
$V = B \times h$

Cône



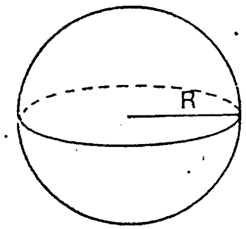
$V = \frac{1}{3} B \times h$

Tronc de cône



$V = \frac{1}{3} \times \Pi \times h \times (R^2 + r^2 + Rr)$

Sphère



$V = \frac{4}{3} \times \Pi \times R^3$

Extrait de Calculer, Mesurer, Résoudre CM2 Nathan 1981

Exercices sur la mesure des aires

C.H 3/94

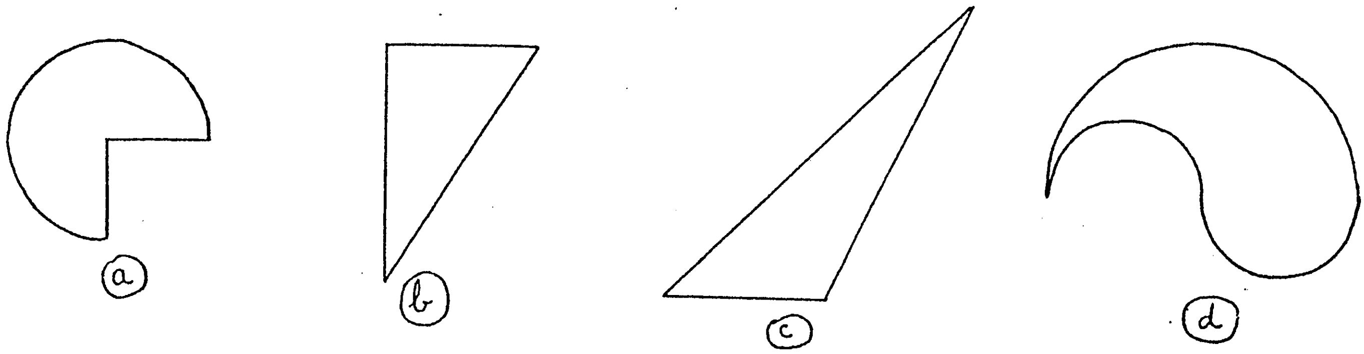
Ex 1 Tracer un parallélogramme MATH, puis construire, à la règle et au compas, un rectangle, un triangle, un losange ayant même aire que ce parallélogramme.

Ex 2 Comment se transforment
- l'aire D d'un disque si on multiplie le rayon de ce disque par 2, 10, k ?
- l'aire C d'un carré si on multiplie son côté par 2, 10, k ?
- l'aire R d'un rectangle si on multiplie sa longueur par 2, 10, k ?

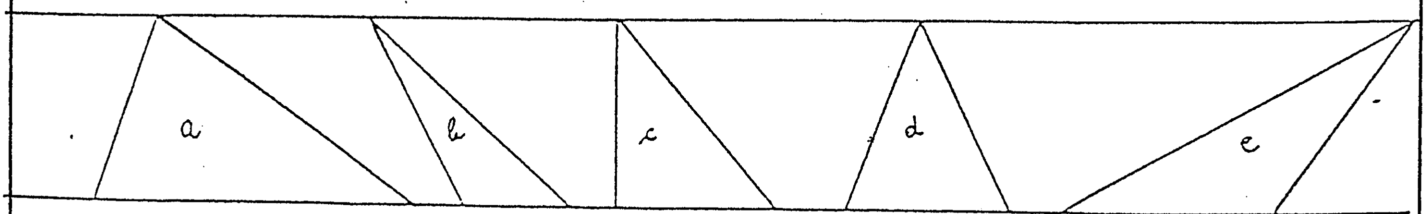
Ex 3 Comment se transforment
- le volume VC d'un cube si on multiplie son arête par 2, 10, k ?
- le volume VR d'un parallélépipède rectangle si on multiplie une de ses dimensions par 2, 10, k ? si on multiplie deux de ses dimensions ?
- le volume VD d'une sphère si on multiplie son rayon par 2, 10, k ?

Ex 4 Construire, à la règle et au compas, un carré d'aire 4 cm^2, puis un carré d'aire double. Recommencer avec un carré de départ quelconque.

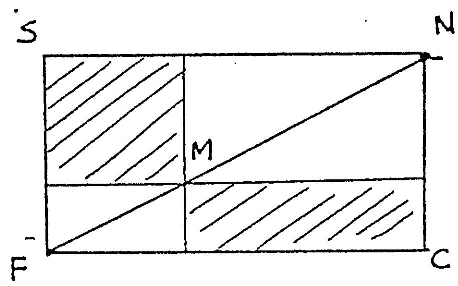
Ex 5 Partager par une ligne continue les surfaces suivantes en deux surfaces d'un seul morceau et de même aire.



Ex 6 Comparer les aires de ces triangles.



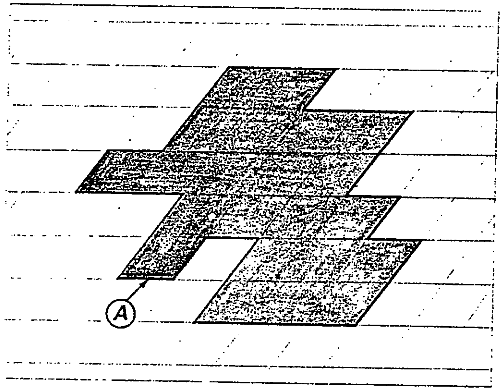
Ex 7 SNCF est un rectangle, [FN] une de ses diagonales, M un point situé sur cette diagonale (n'importe où sur [FN]). Comparer les aires des deux rectangles hachurés.



Ex 8 ABCD est un carré, I le milieu de [AB], J le milieu de [BC], K le milieu de [CD]. Les triangles AIJ et AKD sont hachurés. Quelle fraction d'aire du carré représente la partie non hachurée ?

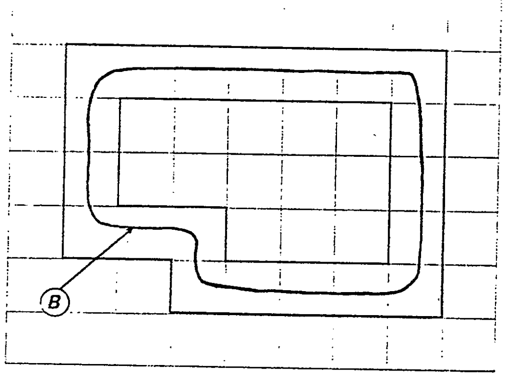
Extrait n°1 MATH OUTIL CM1 Ed MAGNARD 1990

Activités préparatoires



a) u étant l'unité d'aire, calcule l'aire de la surface (A).

b) u étant l'unité d'aire, donne l'aire de la surface (B) sous la forme d'un encadrement.



POUR T'AIDER

a) Il te suffit de compter les unités d'aires contenues dans la surface (A).

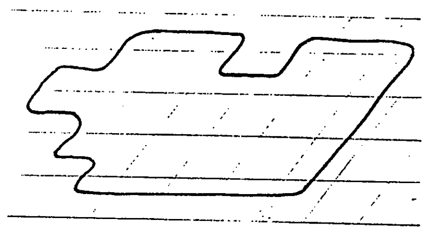
b) Pour la surface (B) :

• Compte le nombre total d'unités entières délimitées par le trait rouge.

• Compte le nombre total d'unités entières délimitées par le trait vert.

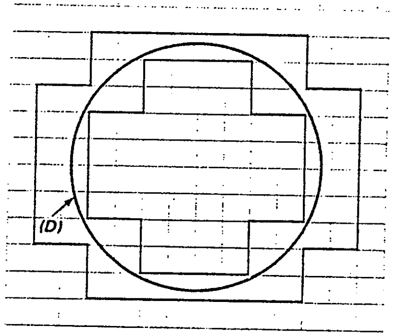
• Encadrement :
... u < aire de (B) < ... u

2 Donne l'aire de la figure ci-contre sous la forme d'un encadrement en prenant comme unité.



3 Donne par encadrement d'aire du disque (D) :

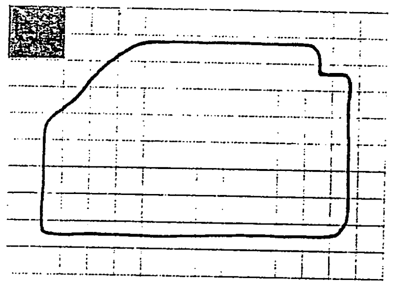
étant l'unité, utilise les tracés effectués.



4 Donne l'aire de la figure ci-dessous sous forme d'un encadrement avec :

puis comme unité.

Compare les deux encadrements, et indique quel est le plus précis.



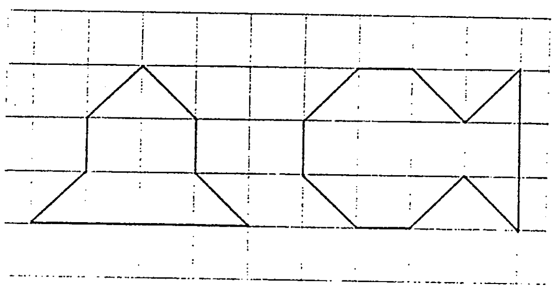
Exercices

1 Calcule l'aire de chacune des figures ci-dessous :

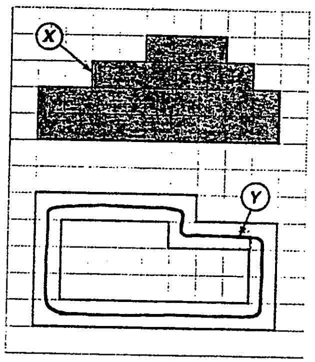
a) en prenant comme unité d'aire.

b) en prenant comme unité.

Que remarques-tu ?



Mémento



En prenant u comme unité, calcule l'aire de la surface (X) et exprime l'aire de la surface (Y) sous forme d'un encadrement.

a) Surface (X) :
Pour calculer l'aire de la surface (X), on compte le nombre d'unités entières contenues dans la figure :
Aire de (X) = 27 u.

b) Surface (Y) :

• Nombre d'unités entières délimitées par le trait rouge : 18

• Nombre d'unités entières délimitées par le trait vert : 42

• Encadrement :
18 u < aire de (Y) < 42 u

65 AIRES (1)

Extrait n°2

Formes différentes, surfaces équivalentes, aires égales.

calcul rapide

1. Ordonne du plus petit au plus grand :
a/ 24,8 ; 42,8 ; 28,4 ; 82,4 ; 48,2 ; 84,2
b/ 5,84 ; 5,48 ; 4,85 ; 4 ; 5,08 ; 8,05 ; 5 ; 50,8

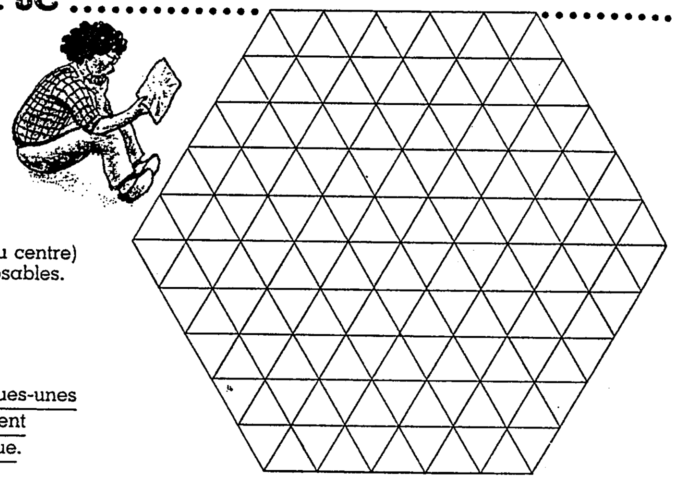
2. Ordonne du plus grand au plus petit :
a/ 20 ; 20,3 ; 2,03 ; 2 ; 30,2 ; 3 ; 32,3 ; 30
b/ 80 ; 8,5 ; 5,85 ; 58,5 ; 58 ; 5,08 ; 50,8 ; 5

découverte

MARTIN JARDINIER...
On a confié à Martin la décoration du grand motif floral de la ville.
Mais on lui impose deux conditions :
- la forme;
- cette forme doit être partagée (à partir du centre) en 6 parties superposables.

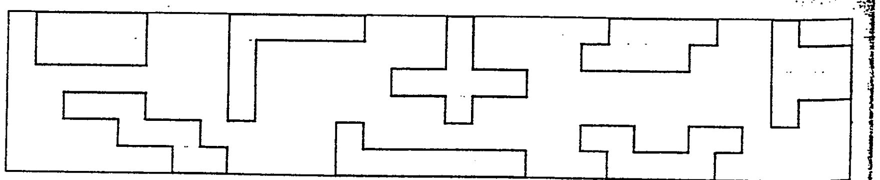
Martin a l'air ennuyé! Y aurait-il plusieurs solutions?

Si oui, trouves-en quelques-unes à l'aide de ton transparent ou d'une feuille de calque.



Différentes formes peuvent avoir la même aire.

EXEMPLE : voici plusieurs formes qui sont composées du même nombre de carrés, et qui ont donc la même aire :

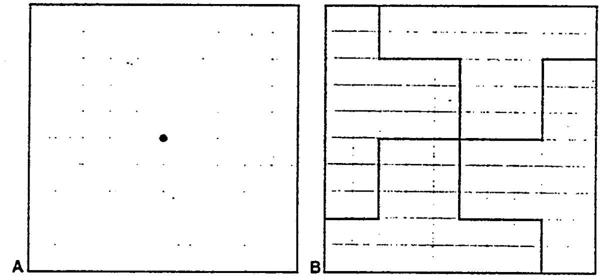


Objectif Calcul CM1
Ed. HATIER 1997

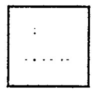
EXERCICES

Utilise le transparent ou une feuille de calque.
En partant du centre, partage le carré A en 4 parties superposables.
Trouve plusieurs solutions.

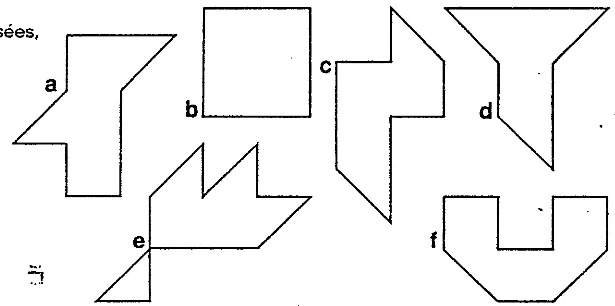
Tu as déjà un premier exemple en B.



Utilise le transparent ou une feuille de calque. Sur ce quadrillage, dessine des formes qui ont la même aire que le modèle :



3 Parmi les 6 figures proposées, 5 ont la même aire.
Trouve celle qui a une aire différente.
Pour t'aider, utilise la figure suivante :

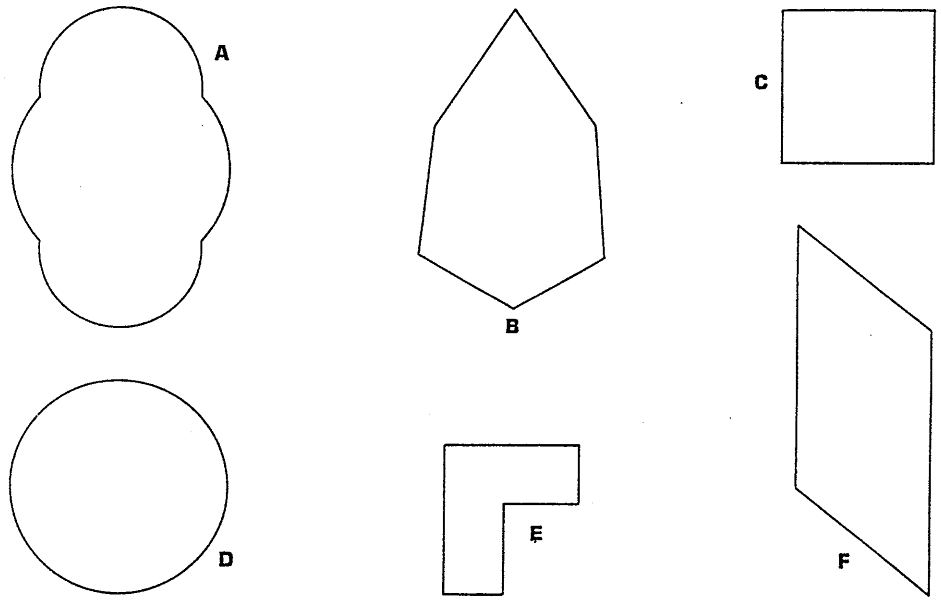


4 Dans une feuille de papier quadrillé, découpe un rectangle de 32 × 20 carreaux.
Ensuite, découpe cette forme à ton idée en plusieurs morceaux et, sans en perdre, reconstitue une figure de ton choix.
Quelle est l'aire de cette nouvelle figure?

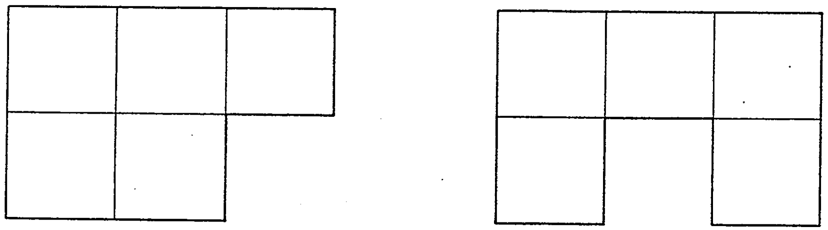
35 Mesures d'aires (1)

RECHERCHE

1 Décalque, puis découpe les six surfaces ci-dessous. Compare leur étendue.
Range-les de la plus « petite » à la plus « grande ». Justifie ta réponse.



2 Voici deux surfaces formées de cinq carrés. Elles ont même aire, mais ne sont pas superposables.



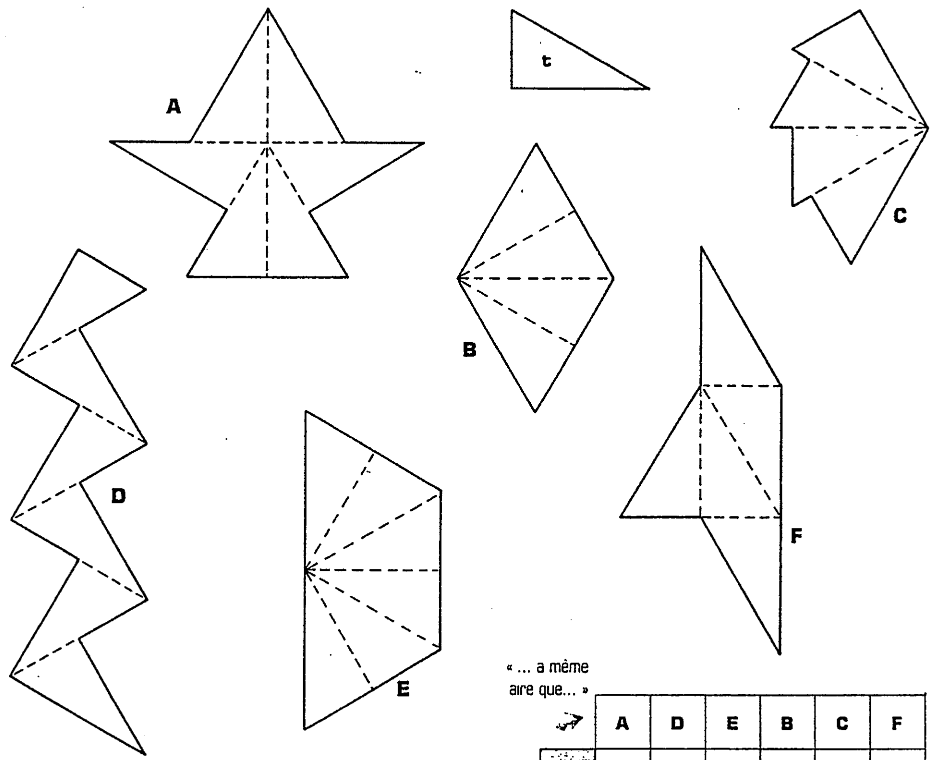
♦ Trouve d'autres assemblages de cinq carrés ayant même aire que ceux représentés ci-dessus.

/191

Extrait n°3 MATH et CALCUL CM1 Ed HACHETTE 1987

APPLICATIONS

1 Observe bien les surfaces ci-dessous qui ont été réalisées en utilisant le triangle **t**.



« ... a même aire que... »

	A	D	E	B	C	F
A						
D						
E						
B						
C						
F						

a/ Reproduis et complète le tableau.

♦ Écris les listes des surfaces qui ont même aire.

b/ Construis :

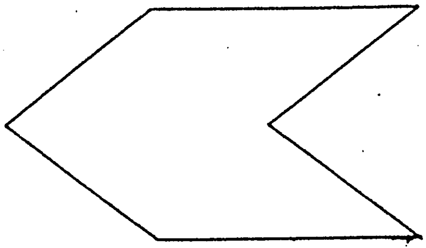
— une surface **G** de même aire que **A** ;
— une surface **H** de même aire que **B** ;
— une surface **I** de même aire que **F**.

c/ Range les surfaces **G, H, I** de la plus « petite » à la plus « grande ».

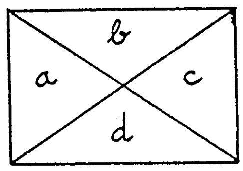
Questionnaire bilan PE1 après le cours sur : *les aires et leur mesure*

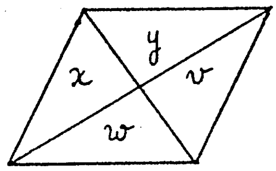
C.H avril 1994

1- Préparez le calcul de la mesure en cm^2 de l'aire de cette surface.

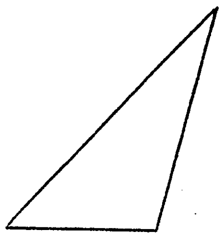


2- Comparez les aires a, b, c et d entre elles, puis les aires x, y, v et w entre elles. Justifiez.

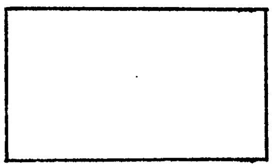




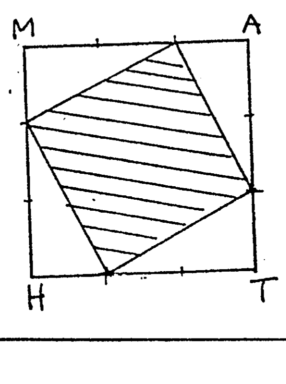
3- Dessinez successivement
- un triangle B, d'aire double de celle du triangle donné A,
- un triangle C, d'aire moitié de celle du triangle donné A.



4- Dessinez une surface J de même aire que le rectangle donné mais de périmètre plus grand, une surface K de même périmètre que le rectangle donné mais d'aire plus grande.



5- MATH est un carré dont tous les côtés ont été équitablement partagés en trois. Quelle fraction de l'aire du carré représente la surface hachurée ?



6- La suite de séances sur les aires et leur mesure ont-elles changé votre perception et votre connaissance mathématique de l'aire ? (oui, non, en quoi, pourquoi)

7- Vous sentez-vous plus armé(e) pour enseigner (en utilisant des manuels, votre cours, etc..)
- l'aire au CM ? (oui, non, en quoi, pourquoi)

- une autre grandeur (longueur, volume, masse,...) de l'école ? (oui, non, en quoi, pourquoi)

8- Que vous manquerait-il encore comme informations pour
- enseigner l'aire au CM ?

- enseigner une autre grandeur de l'école ?

Annexes de la partie III

Annexe W : Le questionnaire remis aux étudiants

Annexe X : Le tableau des résultats : les entêtes de colonnes sont les numéros des choix (1ier, 2ème, 3ème...choix pour le thème) et les entêtes de lignes les différents thèmes du questionnaire répertoriés par leurs lettres ; dans les cases blanches figurent les nombres de réponses sur Rouen et sur Evreux, et dans les cases grisées les totaux par thème sur les 123 questionnaires dépouillés.

Annexe Y : Cumul des trois premiers choix sur (3 pages)

a- les priorités et les thèmes "au point"
b- les priorités et les "peurs"
c- les priorités et les besoins professionnels
d- les thèmes "au point" et les besoins professionnels
e- les "peurs" et les besoins professionnels

Annexe Z : Compétences des 5-8 ans

Extrait de *J.D.I, Journal des Instituteurs* (mai 1987), Editions Nathan..

Questionnaire CH/PE1 octobre 1992

Question préliminaire:

Avez-vous une expérience d'enseignement en mathématiques? (en école élémentaire, au collège,...). Laquelle?

Voici les thèmes d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire; chaque thème est répertorié par une lettre:

a - nombre entier	h - nombres autres qu'entiers (décimaux, fractions,...)
b - addition	i - opérations sur les décimaux
c - soustraction	j - fonctions numériques; proportionnalité
d - multiplication	k - géométrie plane des figures
e - division	l - géométrie plane des tranformations
f - calculatrice	m - géométrie des solides
g - calcul mental	n - mesures (longueur, aire, volume, capacité, masse, temps)

L'étude de chaque thème comporte une partie disciplinaire (connaissance mathématique) et une partie professionnelle (comment enseigner ce thème à l'école).

Complément disciplinaire

1 - Quels thèmes souhaitez-vous voir traités en priorité? Les ranger en les numérotant des plus nécessaires vers les moins nécessaires.

2 - Sur quels thèmes vous sentez-vous à peu près "au point"? Les ranger du plus connu au moins connu.

3 - Y a-t-il des thèmes qui vous effraient plus que d'autres? Lesquels? Pourquoi?

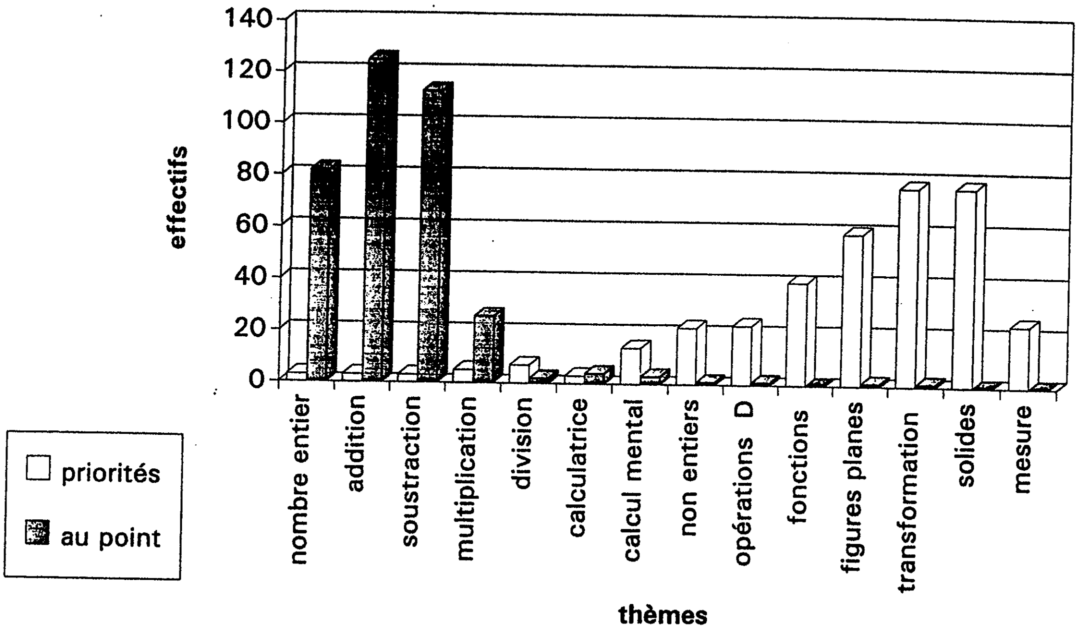
4 - Y a-t-il des thèmes qui vous attirent plus que d'autres? Lesquels? Pourquoi?

Complément professionnel.

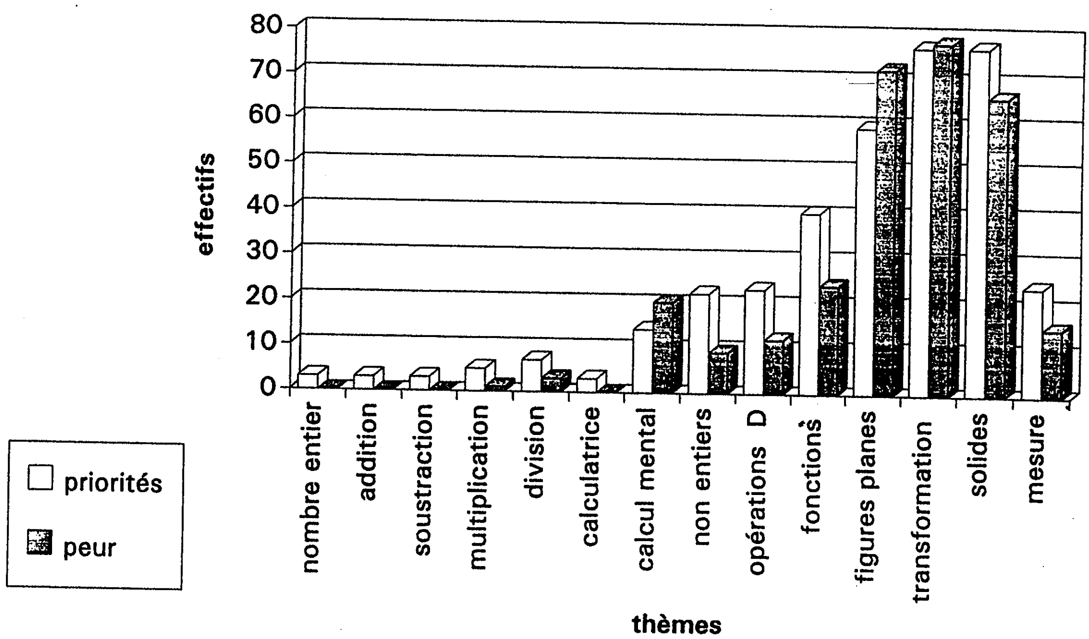
Donnez les thèmes, par ordre d'importance, sur lesquels vous sentez le plus nécessaire une formation professionnelle.

		1			2			3			4			5			6			7			
		Rou	Evr	Tot	Rou	Evr	Tot	Rou	Evr	Tot	Rou	Evr	Tot	Rou	Evr	Tot	Rou	Evr	Tot	Rou	Evr	Total	
Nombre entier	a	2	0	2	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	priorités
		51	24	75	3	1	4	0	3	3	3	2	5	8	3	11	6	0	6	3	0	3	"au point"
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	peur
		4	3	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	1	0	1	profession
Addition	b	1	0	1	2	0	2	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	priorités
		22	15	37	56	28	84	2	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	"au point"
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	peur
		3	5	8	3	2	5	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	profession
Soustraction	c	0	0	0	2	0	2	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	priorités
		0	0	0	18	11	29	57	27	84	3	3	6	1	0	1	0	0	0	0	0	0	"au point"
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	peur
		0	0	0	3	5	8	3	2	5	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	1	1	profession
Multiplication	d	0	3	3	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	2	1	3	0	1	1	priorités
		0	0	0	1	0	1	19	6	25	52	25	77	2	4	6	1	0	1	0	0	0	"au point"
		0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	peur
		1	1	2	2	0	2	3	5	8	3	2	5	2	0	2	0	0	0	1	0	1	profession
Division	e	2	0	2	2	3	5	0	0	0	1	0	1	3	0	3	1	0	1	2	1	3	priorités
		0	0	0	0	0	0	1	1	2	15	5	20	42	18	60	5	0	5	2	2	4	"au point"
		3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	peur
		4	1	5	2	1	3	2	0	2	3	5	8	4	3	7	0	0	0	0	0	0	profession
Calculatrice	f	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	2	0	2	4	2	6	4	0	4	priorités
		4	0	4	0	0	0	0	0	0	4	2	6	11	3	14	24	10	34	5	2	7	"au point"
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	peur
		0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	2	0	0	0	1	0	1	profession
Calcul mental	g	6	2	8	1	0	1	4	1	5	3	1	4	8	1	9	5	4	9	7	3	10	priorités
		0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	2	5	1	6	9	2	11	14	7	21	"au point"
		10	6	16	2	1	3	1	0	1	1	1	2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	peur
		7	1	8	2	1	3	2	0	2	1	2	3	4	0	4	3	4	7	4	1	5	profession
Décimaux rationnels	h	3	4	7	8	1	9	5	1	6	5	2	7	5	1	6	11	1	12	13	4	17	priorités
		0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	4	2	6	13	4	17	9	1	10	"au point"
		4	3	7	0	0	0	1	1	2	1	1	2	0	0	0	2	0	2	0	0	0	peur
		6	3	9	3	0	3	3	3	6	2	1	3	3	2	5	8	0	8	5	5	10	profession
Opérations dans D	i	2	1	3	9	2	11	8	1	9	3	3	6	6	3	9	17	8	25	9	1	10	priorités
		0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	5	2	7	12	1	13	"au point"
		2	0	2	5	3	8	2	0	2	0	0	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	peur
		1	1	2	7	2	9	2	0	2	6	3	9	7	1	8	8	4	12	4	0	4	profession
Fonctions numériques	j	17	4	21	3	4	7	7	5	12	3	3	6	21	13	34	7	1	8	3	0	3	priorités
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	2	0	2	2	1	3	"au point"
		11	3	14	5	1	6	3	1	4	3	0	3	1	4	5	0	0	0	0	0	0	peur
		8	2	10	6	2	8	5	1	6	10	4	14	10	6	16	5	1	6	1	0	1	profession
Géométrie figures	k	14	10	24	8	3	11	13	11	24	20	6	26	4	0	4	4	1	5	2	1	3	priorités
		0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	4	4	8	3	0	3	"au point"
		34	20	54	6	6	12	4	2	6	2	2	4	2	2	4	0	0	0	0	0	0	peur
		27	7	34	3	2	5	8	5	13	10	2	12	4	3	7	2	1	3	2	1	3	profession
Transfo. du plan	l	17	9	26	19	19	38	10	3	13	6	4	10	16	1	17	0	1	1	0	1	1	priorités
		0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	"au point"
		5	2	7	35	22	57	6	8	14	5	0	5	2	0	2	0	0	0	0	0	0	peur
		5	1	6	27	7	34	9	6	15	7	2	9	5	0	5	1	3	4	3	1	4	profession
Géométrie des solides	m	4	8	12	19	8	27	25	13	38	8	4	12	4	3	7	11	0	11	2	0	2	priorités
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	"au point"
		0	2	2	5	1	6	37	21	58	6	6	12	3	0	3	1	0	1	0	0	0	peur
		2	2	4	8	5	13	30	6	36	5	3	8	7	1	8	4	0	4	1	3	4	profession
Mesure	n	10	2	12	7	1	8	3	1	4	25	16	41	4	8	12	6	4	10	14	0	14	priorités
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	3	0	3	"au point"
		5	3	8	4	1	5	2	0	2	6	10	16	3	1	4	2	0	2	2	0	2	peur
		4	3	7	2	1	3	3	2	5	16	5	21	7	3	10	7	2	9	6	0	6	profession

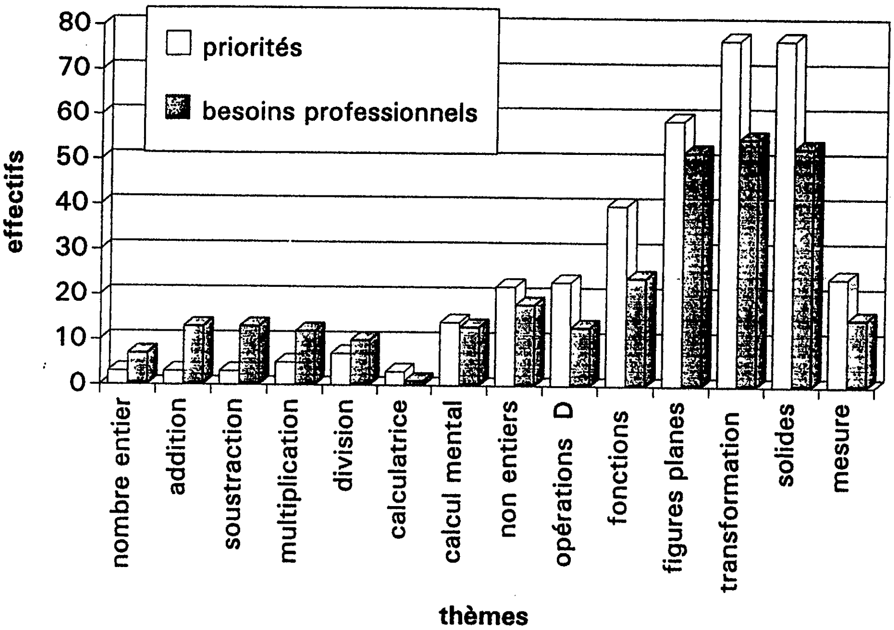
Cumul des 3 premiers choix sur les priorités et les thèmes "au point"



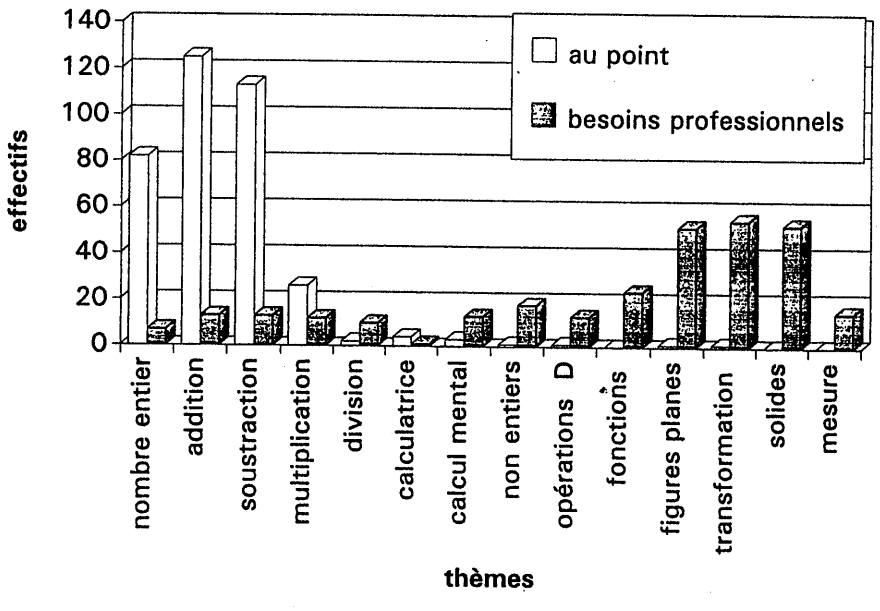
Cumul des 3 premiers choix sur les priorités et les peurs



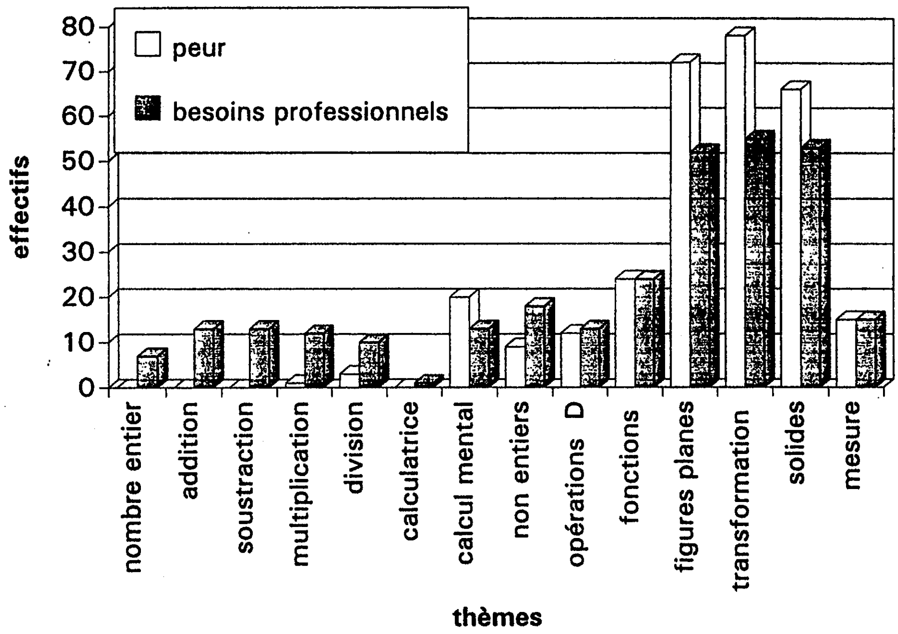
Cumul des 3 premiers choix sur les priorités et les besoins professionnels



Cumul des 3 premiers choix sur les thèmes au point et les besoins professionnels



Cumul des 3 premiers choix sur les peurs et les besoins professionnels



Les enfants et le nombre entier

Que savent les enfants en début de Grande Section ?

↳ grande hétérogénéité des savoirs savoirs souvent instables

Faits notables

- Un peu plus de 10 % n'ont aucun savoir numérique
- Un peu plus de 10 % peuvent énoncer dans l'ordre les 4 ou 5 premiers "mots-nombres", mais, parmi ceux-ci, seuls quelques-uns dénombrent une collection numériquement inférieure à 5.
- Plus de la moitié des enfants savent énoncer "la comptine" au delà de 16, certains au delà de 20 ! Cependant, ceci ne garantit pas la réussite au dénombrement : en effet seulement la moitié de ce groupe peut utiliser ce savoir pour répondre à "Combien y-a-t-il d'objets ?"

Extrait JDI mai 87 (Ed Nathan)

Dossier sur le Nombre

Que savent les enfants en entrant au CP ?

Des observations récentes ont été menées auprès de jeunes enfants : les travaux de C. Meljac (*Décrire, agir et compter*, PUF, 1979), de J.P. Fischer (*Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans*, Revue de Didactique des Mathématiques, 1981) de R. Gelman (*Les bébés et le calcul*, La Recherche, 1983) ainsi que des constats faits dans le cadre de notre recherche :

1) La connaissance de la comptine numérique : la suite orale des nombres est connue à l'entrée au C.P. au-delà de 10 (90 %) souvent jusqu'à 20 (60 %) ou même plus.

2) L'utilisation de cette comptine pour dénombrer (évaluer une quantité) est une activité complexe : il ne faut pas que la comptine « aille plus vite » que les objets pointés, ceux-ci ne devant être pointés qu'une seule fois chacun le dernier mot énoncé correspondre au nombre d'objets de la collection.

Il ne suffit donc pas de connaître la comptine pour savoir dénombrer. L'activité de dénombrement (« Combien y a-t-il de jetons ? ») est moins bien réussie que la précédente.
Pour notre part nous avons établi qu'environ 70 % des élèves, à l'entrée au CP, savent dénombrer une collection comportant un élément de moins que le plus grand nombre de leur comptine (dans le domaine numérique inférieur à 20).

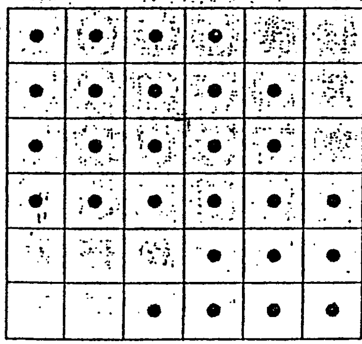
3) La lecture et l'écriture des graphies chiffrées des nombres sont fréquemment maitrisées au-delà de 5, voire de 10 pour certains élèves à l'entrée au CP.

Lecture et écriture des nombres en fonction de l'âge
(en pourcentages d'enfants qui savent lire et écrire le nombre jusqu'à...)

Âges	Rien	5	10	15	20	50	100	Et plus
4 ans	100							
4,6	Quelques graphies isolées							
5 ans			—					
5,6	50	50	30	20				
6 ans, mat.	8	92	92	32	8			
6 ans, CP		100	80	50	10			
6,6		100	100	80	80	60	10	10
7 ans		100	100	90	73	63	63	27

4) Le recours spontané au dénombrement, dans une épreuve où il n'est pas suggéré par la situation (bien qu'il soit le moyen le plus efficace), n'est pas mis en œuvre par tous les enfants de CP qui savent dénombrer. Le nombre comme « mémoire de la quantité » reste à construire pour beaucoup d'élèves.

Epreuve proposée en excercice individuel à 3 classes en début de CP (pourcentages arrondis).
Le quadrillage suivant, dont quelques cases sont occupées par des jetons, est placé devant l'enfant. Une boîte contenant des jetons (une trentaine) est placée sur une table éloignée.



Consigne : « Tu vois, j'ai un carré avec des cases (l'expérimentateur montre quelques cases du doigt), je veux mettre un jeton par case. J'ai commencé, c'est toi qui va finir. Les jetons sont dans cette boîte, là-bas. Tu vas prendre juste ce qu'il te faut de jetons. *Attention*, il faut qu'il y en ait *juste assez, ni plus, ni moins*. Tu regardes bien et après tu vas chercher les jetons qu'il te faut ».
30 % des élèves réussissent cette épreuve, pour la plupart en dénombrant visiblement et 25 % apportent un jeton de plus ou un jeton de moins.

5) Des problèmes arithmétiques peuvent être résolus par les enfants préalablement à tout enseignement. Fischer souligne d'ailleurs « le rôle important que joue le comptage dans la résolution des premiers problèmes par l'enfant » (sous forme de comptage « concret » avec les doigts par exemple, de surcomptage ou de décomptage).
Voici un exemple donné par Fischer : problème verbal : « un petit garçon a x bonbons. Et puis il mange y bonbons. Combien est-ce qu'il lui reste alors de bonbons ? »

	x = 5 y = 2	x = 7 y = 2
5,3 ans	17/32	5/32
5,9 ans	22/32	12/32
6,3 ans	31/32	18/32

Le second exemple est proposé par l'INRP pour les enfants à l'entrée au CP.
L'expérimentateur dispose de 2 cartes sur le verso desquelles sont collées des gommettes, toutes de la même couleur, 4 sur une carte, 3 sur l'autre. L'enfant peut retourner *une seule carte à la fois*, autant de fois qu'il le souhaite et doit dire ensuite combien il y a de gommettes en tout.
De 50 à 60 % des élèves ont réussi cette épreuve, soit « mentalement », soit en pointant des gommettes fictives sur la table, soit en comptant sur leurs doigts.

RESUME

Dans cette thèse, C. Houdement aborde un sujet encore peu étudié dans des recherches en didactique, et beaucoup développé depuis : les pratiques de formation des enseignants (pour les futurs professeurs d'école).Elle a dégagé des éléments de classification des choix des situations de formation pratiqués par les formateurs, en mettant en évidence les variables qui sont à l'oeuvre (même implicitement). Elle a ainsi introduit une "carte" des formations, mettant en rapport contenus mathématiques et stratégies de formation. Elle a aussi mis en évidence des variabilités individuelles (chez les formateurs). Son travail permet notamment de décrire précisément des différences entre formation et ainsi d'aborder un problème qui devient crucial, celui de l'analyse différentielle des effets, sur les étudiants formés, des démarches de formation

MOTS CLES

formation des PE,
mathématiques,
stratégies de formation,
cartes de formation.

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Avril 1995
ISBN : 2-86612-164-3